Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2005-10-25, kl. 9.00-13.00.

5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Uppgifterna 1, 2, 3, 5 och 6 är värda 3 poäng var, uppgift 4 ger 5 poäng vid fullständig behandling. Betygsgränserna är fortfarande (som tidigare angivits) 9 (för betyg 3), 13 (för betyg 4) och 16 (för betyg 5), inklusive bonus.
- Anm.: Det är många deluppgifter, men vissa av dem är lätta.

---

1. Bestäm samtliga värden på följande uttryck (som i vissa fall innehåller mångtydiga funktioner).

   a) $\sqrt{2i}$

   b) $\log i$

   c) $\sin i$

   d) i^i

2. a) Visa att om z och w är komplexa tal så gäller

$$w = \cos z \quad \text{om och endast om} \quad z = -i\log(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

   där, i det senare uttrycket, all grenar av log och $\sqrt{}$ tillåts.

   b) Bestäm samtliga värden på $\arccos\frac{1}{2}$ och $\arccos 2$.

3. a) Visa att funktionen

$$u(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^2 - y^2$$

   uppfyller Laplaces ekvation.

   b) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ (där $z = x + iy$) sådan att

$$\operatorname{Re} f = u.$$

   I svaret ska f anges som funktion av z, dvs. x och y ska ej förekomma separat.

4. Låt D vara övre halvan av enhetsskivan:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

   Bestäm analytiska funktioner som avbildar D på följande områden, D_a, D_b, D_c, D_d resp. D_e.

a) Den del av D som ligger i första kvadranten, dvs.

$$D_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

b) Enhetsskivan med de punkter som ligger på positiva realaxeln (inklusive origo) borttagna:

$$D_b = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus [0, 1).$$

c) Hela första kvadranten

$$D_c = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

(Ledning: Det går med en Möbiustransformation.)

d) Övre halvplanet:

$$D_d = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

e) Hela enhetsskivan:

$$D_e = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

5. Bestäm bilden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} : |z + 4| = 2\}$ under följande Möbiustransformationer.

a)

$$w = \frac{1}{z + 4}$$

b)

$$w = \frac{1}{z + 2}$$

c)

$$w = \frac{1}{z}$$

6. Bestäm en funktion $V = V(x, y)$ som uppfyller Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i cirkelskivan} \quad x^2 + y^2 < 1$$

och har randvärdena

$$V = \begin{cases} 7 & \text{på kvartscirkeln} \quad x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0, \\ 5 & \text{på resten av} \quad x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

LYCKA TILL!