Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2006-01-12, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

---

Anm. Nedanstående lösningar är (bitvis) mer knapphändiga än vad inlämnade tentamenslösningar bör vara. (Och figurer saknas.)

1. Logaritmering av $e^{(e^z)} = 1$ ger
$$e^z = 2\pi i n,$$
n godtyckligt heltal. Logaritmering en gång till (möjligt endast om $n \neq 0$) ger:
$$z = \begin{cases} \ln|2\pi n| + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi m) & \text{om } n > 0, \\ \ln|2\pi n| + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m) & \text{om } n < 0, \end{cases}$$
m godtyckligt heltal. Ovanstående kan sammanfattas som
$$z = \ln(2\pi n) + i(\frac{\pi}{2} + \pi m),$$
n positivt heltal och m godtyckligt heltal.

2. Endast funktionen i c) är analytisk. (Man använder Cauchy-Riemanns ekvationer för att undersöka analyticiteten.)

3. D är området mellan två cirklar som tangerar varandra i punkten $z = 3$. Eftersom $z = 3$ avbildas på $w = \infty$ så avbildas cirklarna på räta linjer, nödvändigtvis parallella eftersom det inte finns någon annan skärningspunkt.

   Sedan kan man sätta in några punkter på cirklarna, eller konstatera att spegelpunktsparen $z = 0, \infty$ (stora cirkeln) och $z = 1, \infty$ (lilla cirkeln) avbildas på $w = -4, 0$ respektive $w = -6, 0$ (som då är spegelpunktspar för de räta linjerna), för att komma fram till att cirklarna avbildas på $\operatorname{Re} w = -2$ respektive $\operatorname{Re} w = -3$. Det sökta området blir därmed
$$\{w \in \mathbb{C} : \quad -3 < \operatorname{Re} w < -2\}.$$
   (Man kontrollerar, t.ex. genom att sätta in någon punkt, att det inte blir ytterområdet istället.)

4. a) Spegelpunkten blir $z^* = 3 + 2i$. (Man kan rita noggranna figurer och resonera geometriskt, till exempel. Alternativt kan man tänka så här: i termer av reella koordinater har linjen ekvationen $x = y$, och speglingen i denna ges av $(x, y) \mapsto (y, x)$.)

   b) De två spegelpunkterna ska avbildas på origo respektive ∞. Detta ger
$$w = \frac{z - (2 + 3i)}{z - (3 + 2i)}.$$

c) Man konstaterar, genom att sätta in $z = 0 \in L$ i svaret på b), att bildcirkeln där har radie $= 1$ (ty $|\frac{-(2+3i)}{-(3+2i)}| = 1$). Alltså väljer vi

$$w = 4 \cdot \frac{z-(2+3i)}{z-(3+2i)}.$$

(Andra korrekta svar finns, både för b) och c).)

5. a) Med $z = x + iy$ har vi att $V(x, y) = \text{Arg}\,(z - a)$. Men $\text{Arg}\,(z - a)$ är imaginärdelen till den analytiska funktionen $\text{Log}\,(z - a)$ och är därmed automatiskt harmonisk.

b) Eftersom $\text{Arg}\,(z - a)$ har tolkningen att vara vinkeln mellan vektorn från $a \in \mathbb{R}$ till z och den del av realaxeln som ligger till höger om punkten a så följer det omedelbart att gränsvärdet blir $= 0$ om $x > a$, $= \pi$ om $x < a$.

c) Låt $V = V_a$ vara den harmoniska funktionen i a) och b) för godtyckligt $a \in \mathbb{R}$. Då kommer funktionen

$$U = A + BV_4 + CV_5,$$

där A, B, C är konstanter, att vara harmonisk i övre halvplanet och styckvis konstant på realaxeln (språng i punkterna 4 och 5).

Enligt svaret på b) gäller att randvillkoren blir uppfyllda on A, B, C är valda så att

$$\begin{cases} A + B\pi + C\pi = 1 \\ A + C\pi = 2 \\ A = 3. \end{cases}$$

Detta ger lösningen

$$U(x, y) = 3 - \frac{1}{\pi}(\text{arccot}\,\frac{x-4}{y} + \text{arccot}\,\frac{x-5}{y}).$$

6. a) Med $z = re^{i\varphi}$ har vi

$$f(z) = \ln r + i\varphi \quad \text{och}$$

$$D = \{z \in C : \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \varphi < \pi\}.$$

Det följer omedelbart att

$$R = \{w = u + iv \in \mathbb{C} : \quad -\infty < u < 0, \quad 0 < v < \pi\}$$

($u = \ln r$, $v = \varphi$). Då ∂D genomlöps i positiv led så genomlöps ∂R i positiv led, varvid halvcirkeldelen svarar mot imaginaäraxeln mellan 0 och $i\pi$, intervallet $(-1, 0)$ på realaxeln mot linjen $\{u + i\pi : -\infty < u < 0\}$ och $(0, 1)$ mot negativa realaxeln.

b) Med den konforma avbildningen $w = f(z)$ transformeras problemet till följande problem för $U = U(u, v)$:

$$\Delta U = 0 \quad \text{i } R,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{på imaginäraxeldelen av } \partial R.$$

$$U(u, v) = \begin{cases} 6 & \text{då} \quad -\infty < u < 0,\ v = \pi \\ 7 & \text{då} \quad -\infty < u < 0,\ v = 0. \end{cases}$$

På imaginäraxeln är normalderivatan av $U = \frac{\partial U}{\partial u}$. Randvillkoren innehåller därmed ingen variation i u-led, och man misstänker därför att det finns en lösning som inte beror på u. De enda harmoniska funktioner som inte beror på u är funktionerna

$$U(u, v) = A + Bv,$$

A och B konstanter. Här kan vi bestämma A och B så att de passar randvillkoren och får då lösningan

$$U(u, v) = 7 - \frac{v}{\pi} = 7 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Im} w,$$

vilket med tillbakatransformering ger lösningen,

$$V(x, y) = 7 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\operatorname{Log} z = 7 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg} z = 7 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{x}{y}.$$