Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2006-01-12, kl. 9.00-13.00.

5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman inklusive bonus, är 9 (för betyg 3), 13 (betyg 4) och 16 (betyg 5).

---

1. Bestäm alla lösningar $z \in \mathbb{C}$ till ekvationen
$$e^{(e^z)} = 1.$$

2. Vilka av följande funktioner av x och y är analytiska som funktioner av den komplexa variabeln $z = x + iy$?

   a)
$$x^2 + y^2 - 2ixy$$

   b)
$$\cos(x^2 + y^2) + i\sin(x^2 + y^2)$$

   c)
$$e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

   Fullständiga motiveringar krävs.

3. Låt D vara området
$$D = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z| < 3, \quad |z-1| > 2\}.$$
   Bestäm bilden av D under Möbiustransformationen
$$w = \frac{12}{z-3}.$$

4. Låt L vara den räta linjen
$$L = \{z \in \mathbb{C} : \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}.$$

   a) Bestäm spegelpunkten till punkten $z = 2 + 3i$ med avseende på L.

   b) Bestäm en Möbiustransformation som avbildar punkten $2 + 3i$ på origo och som avbildar L på en cirkel med medelpunkt i origo.

   c) Samma uppgift som i b), men med tilläggskravet att cirkelns radie ska vara 4.

5. Låt a vara ett reellt tal.

a) Bevisa, genom direkt beräkning eller genom att använda teorin för analytiska funktioner, att funktionen

$$V(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{x-a}{y}$$

är harmonisk i övre halvplanet $\{y > 0\}$.

Anm. Grenvalet hos arccot fastlägges genom $0 < \operatorname{arccot} t < \pi$. Det får anses känt att $\frac{d}{dt} \operatorname{arccot} t = -\frac{1}{1+t^2}$.

b) Bestäm randvärdena på realaxeln (från övre halvplanet)

$$V(x, 0) = \lim_{y \to 0} V(x, y)$$

till V för $x > a$ och $x < a$.

c) Bestäm en lösning $U = U(x, y)$ till Dirichlet-problemet

$$\Delta U = 0 \quad \text{i övre halvplanet,}$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{för} \quad x < 4, \\ 2 & \text{för} \quad 4 < x < 5, \\ 3 & \text{för} \quad x > 5. \end{cases}$$

6. Låt

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \quad x^2 + y^2 < 1, \quad y > 0\}$$

vara övre halvan av enhetsskivan och låt

$$f(z) = \operatorname{Log} z$$

vara principalgrenen av logaritmen ($-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$).

a) f avbildar D konformt och en-entydigt på ett område R i w-planet ($w = f(z)$). Bestäm detta område R. Ange även hur de olika delarna av de orienterade ränderna ∂D och ∂R svarar mot varandra.

b) Använd resultatet i a) för att lösa randvärdesproblemet (där $V = V(x, y)$)

$$\Delta V = 0 \quad \text{i } D,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{på halvcirkeldelen av } \partial D.$$

$$V(x, 0) = \begin{cases} 6 & \text{för} \quad -1 < x < 0, \\ 7 & \text{för} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

LYCKA TILL!