Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2006-10-31, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

---

Anm. Nedanstående lösningar är (bitvis) mer knapphändiga än vad inlämnade tentamenslösningar bör vara. (Och figurer saknas.)

1. a)

$$f(i) = e^{i\log i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2\pi n))} = e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n},$$

n godtyckligt heltal,

$$f(-1) = e^{-1(\ln 1 + i(\pi + 2\pi n))} = e^{-i\pi - 2\pi i n} = e^{-i\pi} = -1$$

(bara ett värde).

b) Allmänt gäller, om vi skriver $z = re^{i\theta}$ för ett specifikt θ, att

$$e^{z\log z} = e^{z(\ln r + i(\theta + 2\pi n))} = e^{z(\ln r + i\theta)} \cdot e^{2\pi n z},$$

n godtyckligt heltal. Mångtydigheten finns enbart i den andra faktorn, och mångtydigheten försvinner där om och endast om $2\pi i n z = 2\pi i \cdot$ heltal för varje n. Detta i sin tur inträffar om och endast om z är ett heltal. Svaret blir alltså $z =$ heltal $\neq 0$.

c) Med vanliga deriveringsregler fås

$$f'(z) = e^{z\log z}(1 \cdot \log z + z \cdot \frac{1}{z}) = e^{z\log z}(1 + \log z).$$

2. a) Uppdelning i real- och imaginärdelar (u resp. v) ger

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Enkla räkningar ger att $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ (räkningarna ska givetvis redovisas på en tentamensskrivning). Alltså är $u + iv$ inte analytisk. (Då en av Cauchy-Riemanns ekvationer spricker behöver man inte ens undersöka den andra.)

b) Här har vi

$$u = \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, \quad v = -\log(x^2 + y^2),$$

och man finner även här att $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, alltså att $u + iv$ inte är analytisk.

c) I detta fall är Cauchy-Riemanns ekvationer uppfyllda (båda två), och funktionen därmed analytisk. Alternativt inser man analyticiteten direkt genom

$$2\operatorname{arccot} \frac{x}{y} - i\ln(x^2 + y^2) = -2i(\ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\operatorname{arccot} \frac{x}{y}) = -2i\log z.$$

3. a) Substitution $z = \frac{w}{3i}$ ger direkt ekvationen $|w - 6i| = 3$.

   b) Punkten $z = 1$ (på cirkeln) avbildas på $w = \infty$, alltså är bild-“cirkeln” en rät linje. Spegelpunkterna $z = 2$ och $z = \infty$ avbildas på $w = 0$ resp. $w = 1$, som då är spegelpunkter med avseende på bildcirkeln. Det följer att denna är

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}.$$

   c) Punkterna $z = 1$ och $z = 3$ (på cirkeln) avbildas på $w = 1$ resp. $w = \frac{1}{3}$, som därmed ligger på bildcirkeln. $w = \infty$ svarar mot $z = 0$, och spegelpunkten till $z = 0$ är den punkt $z = a$, $1 < a < 2$, som uppfyller $(2 - a) \cdot (2 - 0) = 1 \cdot 1$, dvs. $a = \frac{3}{2}$. Punkten $z = a$ avbildas därmed på $w = \frac{2}{3}$, som då är spegelpunkt till $w = \infty$ och därmed bildcirkelns medelpunkt. Det följer nu att bildcirkeln är

$$|w - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}.$$

4. Man kan börja med att skicka hörnpunkten $z = -1$ till origo och hörnnpunkten $z = 5$ till oändligheten med Möbiustransformationen $z \mapsto w_1$ given av

$$w_1 = \frac{z + 1}{z - 5}.$$

Punkten $z = 2$ hamnar då i $w_1 = -1$, på negativa realaxeln, varav följer (med tanke på att Möbiustransformationer är överallt konforma) att D_z avbildas området mellan negativa realaxeln och negativa imaginäraxeln (3:e kvadranten).

Sedan använder man logaritmen,

$$w_2 = \log w_1 = \ln |w_1| + i \arg w_1,$$

som har en enkelvärd gren i 3:e kvadranten ($\pi < \arg w_1 < \frac{3\pi}{2}$, till exempel) och avbildar denna konformt på bandet $\pi < \operatorname{Im} w_2 < \frac{3\pi}{2}$. För att komma till det sökta bandet D_w får man hissa ned lite och skala upp: $w = \frac{8}{\pi}(w_2 - i\pi)$. Den totala avbildningen $z \mapsto w_1 \mapsto w_2 \mapsto w$ blir

$$w = \frac{8}{\pi}(\log \frac{z + 1}{z - 5} - i\pi).$$

Detta är ett möjligt svar på uppgiften, det finns flera.

5. I w-planet får vi, om vi skriver $W(u, v) = V(x, y)$ med $u + iv = w = \sin z = \sin(x + iy)$, problemet

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0 \quad \text{i området} \quad v > 0,$$

$$W = \begin{cases} 1 & \text{på} \quad u < -1, \ v = 0, \\ 2 & \text{på} \quad -1 < u < 1, \ v = 0, \\ 3 & \text{på} \quad u > 1, \ v = 0. \end{cases}$$

Funktionen

$$W = A + B \arg(w - 1) + C \arg(w + 1),$$

är harmonisk i $v > 0$ och styckvis konstant på $v = 0$, språngpunkterna är $u = \pm 1$. Man finner snabbt att våra randdata matchas genom $A = 3$, $B = C = -\frac{1}{\pi}$. Eftersom $w = u + iv = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ ger detta lösningen

$$U(x,y) = W(u,v)) = 3 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u-1}{v} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u+1}{v}$$

$$= 3 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{\sin x \cosh y - 1}{\cos x \sinh y} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{\sin x \cosh y + 1}{\cos x \sinh y}.$$

6. a) Om det ena värdet av $f(z)$ är $w_1 = z + \sqrt{z^2 - 1}$, för en fastlagd gren av kvadratroten, så är det andra $w_2 = z - \sqrt{z^2 - 1}$. Detta ger $w_1 w_2 = z^2 - (z^2 - 1) = 1$, VSB.

   b) Vi kan skriva

$$w = f(z) = z + \sqrt{|z^2 - 1|}e^{\frac{i}{2}\arg(z-1)(z+1)} = z + \sqrt{|z^2 - 1|}e^{\frac{i}{2}(\arg(z-1)+\arg(z+1))},$$

   där $\sqrt{|z^2 - 1|}$ avser den positiva roten. Vi fastlägger en gren av f genom att i exempelvis punkten $z = 2$ bestämma att $\arg(z-1) = 0$, $\arg(z+1) = 0$ och sedan kontinuerligt hålla sig till dessa val av grenar för argumenten. Det enda som skulle kunna göra att detta inte fungerar i hela området D är att då den valda grenen följs längs en sluten kurva man kommer tillbaka till en annan gren. Detta kan enbart inträffa för kurvor som går runt en singularitet eller något område där funktionen inte är definierad (i princip kurvor som inte kan dras ihop till en punkt inom D), i vårt fall segmentet $[-1, 1]$.

   Man inser att det räcker att undersöka en kurva som går ett varv i positiv led runt $[-1, 1]$. Längs en sådan kurva växer vart och ett av argumenten $\arg(z-1)$ och $\arg(z+1)$ med 2π. Det betyder att exponenten i exponentialfunktionen ovan växer med $\frac{i}{2}(2\pi + 2\pi) = 2\pi i$. Men exponentialfunktionen känner inte av en sådan tillväxt (den är ju periodisk med period $2\pi i$), alltså förändras inte $f(z)$, vilket var vad vi behövde visa.

   c) Kvadrering av $w - z = \sqrt{z^2 - 1}$ och enkla räkningar ger att

$$z = g(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) \quad \text{(Joukowskis funktion).}$$

   Då $|w| = R$ skriver vi $w = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, vilket ger

$$z = \frac{1}{2}(Re^{i\theta} + \frac{1}{R}e^{-i\theta}) = (R + \frac{1}{R})\cos\theta + i(R - \frac{1}{R})\sin\theta.$$

   Då $R > 1$ och θ växer från 0 till 2π så genomlöper z en ellips med halvaxlarna $a = R + \frac{1}{R}$, $b = R - \frac{1}{R}$. I gränsfallet $R = 1$ är $a = 1$, $b = 0$, dvs. ellipsen är degenererad till segmentet $[-1, 1]$, som genomlöps fram och tillbaka. Ovanstående ellipser fyller upp hela området D, dvs. g avbildar $|w| > 1$ på hela D (konformt).

7. $f(z) = 0$ om och endast om $2^z = -1$, dvs. $e^{z \ln 2} = e^{i\pi} = e^{i(\pi + 2\pi n)}$, n godtyckligt heltal. Detta ger

$$z = \frac{i\pi + 2\pi i n}{\ln 2},$$

och alla dessa tal ligger på imaginäraxeln, VSB.