Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2006-10-31, kl. 14.00-18.00.

5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Uppgifterna 1–6 är värda 3 poäng var, uppgift 7 ger 1 poäng. Betygsgränserna är 9, 13 och 16 poäng (inklusive bonuspoäng) , för betyg 3, 4 respektive 5.

---

1. Funktionen
$$f(z) = z^z = e^{z \log z}$$
kan definieras för alla $z \in \mathbb{C}$ utom $z = 0$, men för de flesta värden på z finns det flera möjliga värden för $f(z)$. (f är en "mångtydig funktion".)

   a) Bestäm alla värden på $f(i)$ och $f(-1)$.

   b) För vilka z finns det bara ett möjligt värde på $f(z)$?

   c) Beräkna derivatan $f'(z)$. (f är analytisk så fort en gren har valts.)

2. Vilken eller vilka av följande funktioner av x och y är analytiska som funktioner av $z = x + iy$ i något delområde av komplexa talplanet (och för något val av gren för eventuellt förekommande mångtydiga funktioner). Fullständiga motiveringar krävs (kontroll av Cauchy-Riemanns ekvationer eller hänvisning till kända analytiska funktioner).

   a) $\frac{x+iy}{x-iy}$,

   b) $\operatorname{arccot} \frac{x}{y} - i \ln(x^2 + y^2)$,

   c) $2 \operatorname{arccot} \frac{x}{y} - i \ln(x^2 + y^2)$.

3. Bestäm bilden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$ under följande Möbiustransformationer.

   a) $w = 3iz$

   b) $w = \frac{z-2}{z-1}$

   c) $w = \frac{1}{z}$.

4. Bestäm en analytisk funktion som avbildar halvcirkelområdet
$$D_z = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 3, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$$
konformt på det oändliga bandet
$$D_w = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < 4\}$$
genom att först avbilda D_z på en oändlig sektor med en Möbiustransformation och sedan använda logaritmfunktionen, lämpligt justerad.

5. Funktionen $w = \sin z$ avbildar halvbandet

$$D = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y > 0\}$$

konformt på övre halvplanet (behöver ej visas). Använd detta faktum för att bestämma en lösning till randvärdesproblemet (för $V = V(x, y)$)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad D,$$

$$V = \begin{cases} 1 & \text{på} \quad x = -\frac{\pi}{2},\ y > 0, \\ 2 & \text{på} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y = 0, \\ 3 & \text{på} \quad x = \frac{\pi}{2},\ y > 0. \end{cases}$$

Anm.: Det är inte säkert att svaret kan skrivas på särskilt enkel form, men försök i alla fall att skriva svaret så att det bara innehåller reellvärda funktioner av de reella variablerna x och y.

6. Funktionen $w = f(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ är flertydig (har två möjliga värden för varje $z \neq \pm 1$), men kan göras enkelvärd och analytisk i vissa typer av områden genom att man väljer ut en gren av den.

   a) Visa att för givet z så är de två möjliga värdena, w_1 och w_2, på $f(z)$ är relaterade genom $w_1 w_2 = 1$.

   b) Visa att det går att välja en enkelvärd analytisk gren av f i området

   $$D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$$

   c) Det visar sig att f har en enkelvärd invers, $z = g(w)$. Bestäm denna. Hur avbildar $g(w)$ cirkeln $|w| = 1$? Och cirklarna $|w| = R$, $1 < R < \infty$?

Anm.: Deluppgifterna a), b), c) kan lösas oberoende av varandra.

7. Detta är ett lätt extraproblem, som ger 1p. Visa att alla nollställen till funktionen

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2^z}$$

ligger på imaginäraxeln. (2^z definieras som $e^{z \ln 2}$, dvs. vi väljer $\arg 2 = 0$.)

Ovidkommande anmärkning: Det kanske mest berömda öppna problemet inom matematiken, Riemanns hypotes, handlar om nollställena till funktionen $\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \dots$ (oändlig serie). Påståendet är att en viss typ av nollställen ligger på linjen $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$.

LYCKA TILL!