Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2007-01-16.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

---

1. Vi har
$$f(z) = 2^z = e^{z\log 2} = e^{z(\ln 2 + 2\pi i n)} = e^{z\ln 2}\cdot e^{2\pi i n z},$$
n godtyckligt heltal. Här är den första faktorn entydigt bestämd, men om z inte är ett heltal så beror den andra faktorn verkligen på n. Om t.ex. $z = i$ så får vi
$$2^z = e^{z\ln 2}\cdot e^{-2\pi n}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots,$$
alltså oändligt många olika värden. Funktionen $f(z)$ är alltså flervärd.
För analys av $g(z)$, $h(z)$, skriv $z = re^{i\theta} = re^{i\theta}$, n godtyckligt heltal. Vi har då
$$g(z) = z^2 = e^{2\log z} = e^{2(\ln r + i(\theta + 2\pi n))} = e^{2(\ln r + i\theta)}\cdot e^{4\pi i n}.$$
Eftersom $e^{4\pi i n} = 1$ för alla val av n blir värdet på $g(z)$ entydigt bestämt $(g(z) = e^{2(\ln r + i\theta)} = z\cdot z)$.
Men
$$h(z) = z^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i(\theta + 2\pi n))} = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\theta)}\cdot e^{\pi i n} = \pm e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\theta)}$$
har två värden (olika tecken beroende på om n är udda eller jämnt).

2. a) Man får
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3x - 3x = 0.$$
b) Cauchy-Riemanns ekvationer för $f = u + iv$, ger först att
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 2y,$$
$$v = 3x^2y - y^3 - y^2 + C(x),$$
varav
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + C'(x).$$
Detta ska å andra sidan vara $= -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + 2x$, vilket ger $C'(x) = 2x$, $C(x) = x^2 + A$ (A konstant). Allt detta ger
$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 2xy + i(3x^2y - y^3 - y^2 + x^2 + A) = (x+iy)^3 + i(x+iy)^2 + iA = z^3 + iz^2 + iA.$$

3. a) Med användande av definitionen för tan får vi ekvationen

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} = iw.$$

Sätt $t = e^{iz}$ och lös ekvationen med avseende på t (eller t^2). Det ger $t^2 = \frac{1+iw}{1-iw}$, varav

$$z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw} \quad (= \arctan w).$$

b) Med $w = 2\sqrt{3} - i$ får vi

$$z = \arctan(2\sqrt{3}-i) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i(2\sqrt{3}-i)}{1-i(2\sqrt{3}-i)} = \frac{1}{2i}\log\frac{2+i2\sqrt{3}}{-i2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2i}\log(-1+\frac{i}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{2i}(\ln\sqrt{1+\frac{1}{3}} + i(\frac{5\pi}{6}+2\pi n))$$

$$= \frac{5\pi}{12} + \pi n - i\ln\frac{2^{1/2}}{3^{1/4}},$$

där n är godtyckligt heltal.

4. Sätt $w = \frac{2}{4-z}$. Avbildningen $z \mapsto w$ är en Möbiustransformation och den sökta mängden svarar i w-planet mot den räta linjen $\operatorname{Re} w = 1$. Alltså måste M vara en cirkel eller en rät linje.

Den inversa avbildningen $w \mapsto z$ ges av $z = \frac{4w-2}{w}$. Vi ser att exempelvis punkterna $w = 0, 1, 2, \infty$ svarar mot $z = \infty, 2, 3, 4$, respektive. $w = 0, 2$ är spegelpunktspar med avseende på linjen i w-planet, alltså är $z = \infty, 3$ spegelpunktspar med avseende på M. Det följer att M är en cirkel med medelpunkt 3. Punkterna $w = 1, \infty$ ligger på den räta linjen, alltså ligger $z = 2, 4$ på cirkeln M. (Det hade räckt med att titta på en av dessa punkter, man kan betrakta den andra som en kontrollpunkt.) Det följer att cirkeln har radie $= 1$, och vi har den explicita beskrivningen

$$M = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| = 1\}.$$

5. a) En analytisk funktion ger en konform avbildning i exakt de punkter där derivatan är skild från noll. I vårt fall har vi $f'(z) = 2z$, så f är konform i alla punkter utom $z = 0$.

b) I polära koordinater har vi $f(re^{i\theta}) = r^2 e^{i2\theta}$, varav följer att varje radiell stråle från origo avbildas på den radiella strålen med dubbla vinkeln till positiva x-axeln. Detta ger att

$$f(D) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

c) Med avbildningen f kommer vi enligt b) till vänstra halvplanet, som alltså ska avbildas på $|w| < 5$ med en återstående avbildning g. Detta går bra med en Möbiustransformation, och med spegelpunktsresonemang finner man att det kan vara lämpligt att låta $g(-1) = 0$, $g(+1) = \infty$, och sedan, för att fixa radien, $g(0) = 5$. Allt detta ger

$$g(z) = -5\frac{z+1}{z-1}.$$

Ett svar på uppgiften blir nu den sammansatta avbildningen

$$z \mapsto w = g(f(z)) = -5\frac{z^2+1}{z^2-1}$$

(det finns flera korrekta svar).

.

6. Vi använder Möbiustransformationen $w = \frac{4}{z}$. (Det går lika bra med t.ex. $w = \frac{1}{z}$, men vårt val ger enklare siffror.) Punkterna $z = 0, 1, 2, 3, 4, \infty$ avbildas på respektive $w = \infty, 4, 2, \frac{4}{3}, 1, 0$. Cirkeln $|z-1| = 1$ avbildas med tanke på spegelpunktspar $z = 1, \infty$ då på linjen $\operatorname{Re} w = 2$, och cirkeln $|z-2| = 2$ (spegelpunkter $z = 2, \infty$) på linjen $\operatorname{Re} w = 1$. Det följer att D avbildas på bandet $1 < \operatorname{Re} w < 2$. (Det blir inte det yttre av bandet eftersom $3 \in D$ avbildas på $w = \frac{4}{3}$.)

   I w-planet blir randvärdesproblemet att vi söker en funktion $W(w)$ som är harmonisk i bandet $1 < \operatorname{Re} w < 2$ och har randvärdena $W = 4$ på linjen $\operatorname{Re} w = 1$, $W = 3$ på linjen $\operatorname{Re} w = 2$. Dessa randdata kan enkelt matchas med en linjär funktion, nämligen

$$W(w) = 5 - u = 5 - \operatorname{Re} w$$

   ($w = u + iv$). Linjära funktioner är alltid harmoniska, och vi får nu lösningen till det givna problemet genom att transformera tillbaka till z-planet:

$$V(z) = W(w) = 5 - \operatorname{Re}\frac{4}{z} = 5 - \frac{4x}{x^2+y^2}.$$