Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2007-01-16, kl. 8.00-12.00.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 1: Komplexa funktioner

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Varje uppgift bedöms med 0–3 poäng. Betygsgränserna är 9, 13 och 16 poäng (inklusive bonuspoäng) , för betyg 3, 4 respektive 5.
- Uppgifterna står inte i svårighetsordning.

---

1. Om a, b är komplexa tal ($a \neq 0$) så är som bekant uttrycket a^b oftast, men inte alltid, mångtydigt (flervärt). De tre funktionerna

$$f(z) = 2^z, \quad g(z) = z^2, \quad h(z) = z^{1/2}$$

illustrerar detta. Avgör för var och en av f, g och h om funktionen är enkel- eller flervärd.

2. a) Visa att funktionen

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2xy$$

uppfyller Laplaces ekvation.

b) Bestäm en analytisk funktion $f(z)$ (där $z = x + iy$) sådan att

$$\operatorname{Re} f = u.$$

I svaret ska f anges som funktion av z, dvs. x och y ska ej förekomma separat.

3. a) Givet $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$, härled en formel för lösningarna $z \in \mathbb{C}$ till ekvationen

$$\tan z = w,$$

dvs. härled en formel för $\arctan w$. Formeln får endast innehålla logaritmer och de fyra enkla räknesätten.

b) Bestäm alla värden på $\arctan(2\sqrt{3} - i)$.

4. Bestäm punktmängden

$$M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{2}{4 - z} = 1\},$$

dvs. ge en så enkel och explicit beskrivning av M som möjligt. Rita gärna.

5. Låt $f(z) = z^2$. Vi betraktar f som en avbildning $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

   a) I vilka punkter är avbildningen f konform?

   b) På vilket område avbildar f sektorn

$$D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\} \quad ?$$

   c) Bestäm en konform avbildning av D på cirkelskivan $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 5\}$.
   (*Ledning för c):* Det är lämpligt att börja med avbildningen f.)

6. Med

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 1, \quad |z-2| < 2\},$$

lös randvärdesproblemet

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad D,$$

$$V = \begin{cases} 3 & \text{på} \quad |z-1| = 1, \\ 4 & \text{på} \quad |z-2| = 2. \end{cases}$$

Ledning: Avbilda D konformt på ett oändligt band genom att skicka $z = 0$ till oändlighetspunkten med hjälp av en Möbiustransformation. I det oändliga bandet blir sedan randvärdesproblemet så enkelt att det kan lösas direkt (genom att gissa och pröva).

LYCKA TILL!