Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Lösningsförslag till tentamen i 5B1215 Komplexa funktioner för ME, tisdagen den 11:e januari 2005, kl. 9.00–13.00

- Hjälpmedel: BETA.
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- Om lappskrivning j är godkänd (där j=1 eller 2), så fås automatiskt 3 poäng på uppgift j.
- Betygsgränser: 9–11 poäng ger betyget 3, 12–14 poäng ger betyget 4, och 15–18 poäng ger betyget 5.

1. (a) *Skriv det komplexa talet* $\operatorname{Log}[(-1)\cdot i]$ *på formen* $a+ib$, *där* a *och* b *är reella tal.*

   (b) *Samma uppgift för* $\operatorname{Log}(-1)+\operatorname{Log} i$.

   (c) *Stämmer svaren i (a) och (b) överens med de vanliga logaritmlagarna? Om inte, hur kan man åtgärda detta?*

   Lösning: $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, där $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi \Rightarrow \operatorname{Log}(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$, medan $\operatorname{Log}(-1)+\operatorname{Log} i = \ln 1 + i\pi + \ln 1 + i\pi/2 = i\cdot 3\pi/2$. För att logaritmlagen $\log(z_1 \cdot z_2) = \log z_1 + \log z_2$ ska gälla måste man byta $\operatorname{Arg} z$ mot $\arg z$, där det senare argumentet innehåller en godtycklig multipel av 2π.

2. *Definiera den komplexa cosinusfunktionen med hjälp av den komplexa exponentialfunktionen, och visa sedan* utgående från denna definition *att*

   (a) $\cos(ix) = \cosh x$ för alla reella x,

   (b) $|\cos z| = \sqrt{(\cos x)^2 + (\sinh y)^2}$, där $z = x + iy$.

Lösning: $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$; detta ger att $\cos(ix) = (e^{-x} + e^{x})/2 = \cosh x$. Vidare följer det att

$$\begin{aligned} 2\cos z &= e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} = e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y} \\ &= (\cos x + i\,\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\,\sin x)e^{y} \\ &= \cos x(e^{y} + e^{-y}) - i\,\sin x(e^{y} - e^{-y}) \\ &= 2\cos x\cosh y - 2i\,\sin x\cosh y; \end{aligned}$$

om man dividerar med 2 och tar kvadraten på beloppet av detta får man

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= (\cos x)^2(\cosh y)^2 + (\sin x)^2(\sinh y)^2 = \{\text{ hyperboliska ettan }\} \\ &= (\cos x)^2(1 + (\sinh y)^2) + (\sin x)^2(\sinh y)^2 \\ &= \{\text{ trigonometriska ettan }\} = (\cos x)^2 + (\sinh y)^2, \end{aligned}$$

så att

$$|\cos z| = \sqrt{(\cos x)^2 + (\sinh y)^2}.$$

3. (a) *Låt $g(x,y)$ vara en (reell) harmonisk funktion i xy-planet, som* inte *beror på y (utan alltså bara på x). Visa att*

$$g = ax + b,$$

där a och b är godtyckliga (reella) konstanter.

(b) *Använd resultatet i (a) för att lösa följande Dirichletproblem:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad 3 < x < 5, \quad -\infty < y < \infty, \\ &g(3,y) = 10, \quad g(5,y) = 40 \quad \text{då} \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned}$$

Lösning: (a) $g''(x) = 0 \iff g'(x) = a \iff g(x) = ax + b$.

(b) Ansätt $g(x,y) = ax + b$; enligt (a) satisfierar då $g(x,y)$ Laplaces ekvation. Randvillkoren ger sedan att

$$\begin{cases} 10 = g(3,y) = a \cdot 3 + b & (1), \\ 40 = g(5,y) = a \cdot 5 + b & (2). \end{cases}$$

$(2) - (1)$ visar att $2a = 30 \iff a = 15$; sedan ger (1) att $b = 10 - 3 \cdot 15 = -35$, varför svaret blir

$$g(x,y) = 15x - 35.$$

4. *Låt $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ vara fyra punkter på x-axeln, och låt A, B vara konstanter. Visa att Dirichletproblemet*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$
$$g(x,0) = \begin{cases} A & \text{då} \quad a_1 < x < a_2, \\ B & \text{då} \quad b_1 < x < b_2, \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

har lösningen

$$g(x,y) = A \cdot \frac{\alpha}{\pi} + B \cdot \frac{\beta}{\pi},$$

där vinklarna α och β definieras på följande sätt: Om punkten (x,y) betecknas med p, så är α vinkeln vid p i triangeln med hörn i punkterna a_1, a_2, p, och β är vinkeln vid p i triangeln med hörn i punkterna b_1, b_2, p.

Lösning: Med $z = x + iy = (x,y) = p$ fås på vanligt sätt (se kompendiet!) att

$$\begin{aligned} g(x,y) =& B \cdot \frac{1}{\pi} \arg(z - b_2) - B \cdot \frac{1}{\pi} \arg(z - b_1) \\ &+ A \cdot \frac{1}{\pi} \arg(z - a_2) - A \cdot \frac{1}{\pi} \arg(z - a_1). \end{aligned}$$

I triangeln med hörn i punkterna b_1, b_2, p är vinkeln vid b_1 lika med $\arg(z-b_1)$, vinkeln vid b_2 är lika med $\pi - \arg(z-b_2)$, så att $\beta =$vinkeln vid p är lika med $\pi - \arg(z - b_1) - (\pi - \arg(z - b_2)) = \arg(z - b_2) - \arg(z - b_1)$. På samma sätt fås att $\alpha = \arg(z - a_1) - \arg(z - a_2)$. Tillsammans ger detta att

$$g(x,y) = A \cdot \frac{\alpha}{\pi} + B \cdot \frac{\beta}{\pi}.$$

5. *Lös följande Dirichletproblem:*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y > 0,$$
$$g(-\pi/2, y) = 0 \quad \text{och} \quad g(\pi/2, y) = 0 \quad \text{då} \quad y > 0,$$
$$g(x,0) = 100 \quad \text{då} \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Lösning: Standardavbildningen $w = \sin z$ ger ett Dirichletproblem i övre w-halvplanet med randvillkoret

$$g(u,0) = \begin{cases} 0, & u < -1, \\ 100, & -1 < u < 1, \\ 0, & u > 1, \end{cases}$$

som enligt kompendiet har lösningen

$$g(u,v) = \frac{100}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u-1}{v} - \frac{100}{\pi}\operatorname{arccot}\frac{u+1}{v}.$$

Eftersom $u + iv = w = \sin z = \sin x \cosh y + i\,\cos x \sinh y$ fås till slut att

$$g(x,y) = \frac{100}{\pi}\left(\operatorname{arccot}\frac{\sin x \cosh y - 1}{\cos x \sinh y} - \operatorname{arccot}\frac{\sin x \cosh y + 1}{\cos x \sinh y}\right).$$

6. *Bestäm en konform avbildning av*

$$\mathcal{D}_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

på

$$\mathcal{D}_w = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0 \text{ eller } v < 0 \text{ eller } v = 0 \text{ och } |u| > 1\}.$$

Ledningar: (i) *Avbilda först $\mathcal{D}_z$ på högra w_1-halvplanet genom att räta ut enhetscirkeln och skicka en lämplig randpunkt till origo.*

(ii) *Avbilda sedan högra w_1-halvplanet på $\{-\pi < \arg w_2 < \pi\}$.*

(iii) *Observera att det är ganska lätt att avbilda $\mathcal{D}_w$ konformt på $\{-\pi < \arg w_2 < \pi\}$; invertera därefter denna avbildning!*

Lösning: Skicka t.ex. $z = 1$ till $w_1 = 0$ och $z = -1$ till $w_1 = \infty$ med hjälp av Möbiusfunktionen

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}.$$

Eftersom $z = -1 \mapsto w_1 = \infty$ blir bilden av enhetscirkeln en cirkel genom oändligheten, det vill säga en rät linje. Det är uppenbart att reella axeln avbildas på sig själv, och då vidare den räta vinkeln mellan enhetscirkeln och reella axeln vid $z = 1$ bevaras, inser man att bildlinjen blir vinkelrät mot reella axeln i $w_1 = 0$, och sammanfaller därför med den imaginära w_1-axeln. Bilden av $\mathcal{D}_z$ blir därför antingen det vänstra eller det högra w_1-halvplanet. För att bestämma vilket, observerar vi att punkten $z = 0$ utanför $\mathcal{D}_z$ hamnar i $w_1 = -1 \in$ vänstra halvplanet, varför bilden av $\mathcal{D}_z$ måste bli det högra w_1-halvplanet.

Skriver man det senare som $\{w_1 \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \arg w_1 < \pi/2\}$, inser man att funktionen

$$w_2 = w_1^2 = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

avbildar detta på

$$\{w_2 \in \mathbb{C} \mid -\pi < w_2 < \pi\},$$

det vill säga hela w_2-planet minus negativa reella axeln.

Nu är det lätt att avbilda $\mathcal{D}_w$ konformt på detta uppskurna w_2-plan: skicka nämligen $w = -1$ till $w_2 = \infty$ och $w = 1$ till $w_2 = 0$ med Möbiusfunktionen

$$w_2 = \frac{w-1}{w+1};$$

bilden av $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0,\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ blir då en halvlinje som startar i $w_2 = 0$ och passerar $w_2(0) = -1$ på väg mot oändligheten – och sammanfaller därför med negativa reella w_2-axeln. Men då kommer $\mathcal{D}_w =$ ytterområdet till slitsen $\{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0,\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ att avbildas på det uppskurna w_2-halvplanet.

Denna avbildning inverteras sedan genom att lösa ut w ur ovanstående ekvation:

$$\begin{aligned} ww_2 + w_2 = w - 1 \iff w(w_2 - 1) = -w_2 - 1 \\ \iff w = \frac{1 + w_2}{1 - w_2} = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}. \end{aligned}$$

Förenklingar ger till slut att den sökta avbildningen blir en Joukowskifunktion:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = \frac{z^2 + 2z + 1 + z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1 - z^2 + 2z - 1} \\ &= \frac{2(z^2+1)}{2 \cdot 2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$