Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1215 Partiella differentialekvationer för ME och K,
05–03–07, kl. 8.00–13.00.

- Hjälpmedel: BETA.
- Man kan få maximalt 18 poäng på denna tentamensskrivning, så tillsammans med bonuspoängen kan man som mest få 24 poäng.
- Poänggränser: 10–14 p ger betyget 3, 15–19 p ger betyget 4, och 20–24 p ger betyget 5.
- Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

1. (a) *Antag att envariabelsfunktionerna* $f(x)$ *och* $g(y)$ *är deriverbara för* $-\infty < x < \infty$ *respektive* $-\infty < y < \infty$*, och att*

$$f(x) = g(y) \qquad \text{för alla } x \text{ och } y,$$

Visa att då måste

$$f(x) = g(y) = \text{konstant.} \qquad \text{(1p)}$$

Lösning: $\partial/\partial x$ på $f(x) = g(y)$ ger $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{konstant}$.

(b) *Betrakta följande randvärdesproblem:*

ODE	$y''(x) + 5y'(x) - 2y(x) = 0, \quad 0 < x < 7;$
$(\text{RV})_{x=0}$	$y(0) = 0;$
$(\text{RV})_{x=7}$	$y(7) = 17.$

Visa att superpositionsprincipen (det vill säga $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *lösningar* $\Rightarrow$ varje *lineärkombination* $c_1 \cdot y_1(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x)$ *är också en lösning) gäller för ODE och* $(RV)_{x=0}$*, men inte för* $(RV)_{x=7}$. (1p)

Lösning: Om $y_1, \ldots, y_n$ är lösningar till ODE:n, så ska vi visa att också $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ är en lösning:

$$(d^2/dx^2 + 5d/dx - 2)y = \sum_{k=1}^{n} c_k (d^2/dx^2 + 5d/dx - 2) y_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 0 = 0.$$

På samma sätt: $y_1(0) = 0, \ldots, y_n(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 0 = 0$.
Men $y(7) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot 17 \neq 17$ i allmänhet.

2. *I detta problem ska du lösa följande vågekvation för enhetsskivan:*

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{då } x^2+y^2<1 \text{ och } t>0; \\ \text{RV} & u(x,y,t) = 0 & \text{då } x^2+y^2=1 \text{ och } t>0; \\ (\text{BV})_1 & u(x,y,0) = (1-x^2-y^2)\cdot 2xy & \text{då } x^2+y^2<1; \\ (\text{BV})_2 & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = 0 & \text{då } x^2+y^2<1. \end{array}$$

Genom att införa polära koordinater (det vill säga $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) övergår detta i

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, & 0<r<1,\ -\infty<\theta<\infty,\ t>0; \\ (\text{RV})_r & u(0,\theta,t) = \text{begränsad},\ u(1,\theta,t)=0, & -\infty<\theta<\infty,\ t>0; \\ (\text{RV})_\theta & u(r,\theta+2\pi,t) = u(r,\theta,t), & 0<r<1,\ -\infty<\theta<\infty,\ t>0; \\ (\text{BV})_1 & u(r,\theta,0) = (1-r^2)\cdot r^2\sin 2\theta, & 0<r<1,\ -\infty<\theta<\infty; \\ (\text{BV})_2 & \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, & 0<r<1,\ -\infty<\theta<\infty. \end{array}$$

Eftersom superpositionsprincipen (i analogi med föregående tal) gäller för PDE + $(RV)_r$ + $(RV)_\theta$ + $(BV)_2$ börjar man med att ansätta

$$u(r\theta,t) = R(r)\cdot\Theta(\theta)\cdot T(t)$$

för dessa.

(a) *Starta med att separera ut t-variabeln, och visa att $T(t)$ satisfierar*

$$T''(t) - \text{konstant}\cdot T(t) = 0.$$

Förklara varför villkoret att vi ska få en svängning *tvingar konstanten att bli negativ (säg lika med $-\lambda^2$, där $\lambda > 0$), och härled därefter den allmänna lösning som dessutom uppfyller $(BV)_2$.* (1p)

Lösning: Insättning av $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ i PDE:n ger

$$\frac{R\Theta T''}{R\Theta T} = \frac{R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T}{R\Theta T} = k = \text{konstant}$$
$$\iff \frac{T''}{T} = k \quad \text{och} \quad \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} = k.$$

Om k är positiv blir $T(t)$ en lineärkombination av två exponentialfunktioner, och alltså ingen svängning. Om $k = 0$ blir $T = at + b$, som inte heller är någon svängning. Så $k < 0$ – säg att $k = -\lambda^2$, med $\lambda > 0$. $T(t)$ uppfyller då $T'' + \lambda^2 T = 0$, med lösningen

$$T(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t).$$

$(\mathrm{BV})_2 \Rightarrow$ att $T'(0) = 0$, vilket medför att $B = 0$. Så t-beroendet för $u(r, \theta, t)$ ges (bortsett från en konstant) av

$$T(t) = \cos(\lambda t),$$

där λ är en positiv separationskonstant.

(b) *Separera sedan θ- och r-variablerna, och visa att 2π-periodiciteten med avseende på θ medför att*

$$\Theta = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta), \qquad \text{där } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Konstatera därpå att med λ och m som ovan blir $R(r)$ en lösning till egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - m^2 R + \lambda^2 r^2 R = 0, & 0 < r < 1, \\ R(0) = \text{begränsad}, \ R(1) = 0. \end{cases} \qquad (1\text{p})$$

Lösning: Vi har

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = -\lambda^2.$$

Genom att multiplicera med r^2 och flytta om lite grann kan vi separera θ- och r-variablerna:

$$\begin{aligned} &\frac{r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = k = \text{ny konstant} \\ \iff \ & \Theta'' + k \cdot \Theta = 0 \quad \text{och} \quad r^2 R'' + rR' - kR + \lambda^2 r^2 R = 0. \end{aligned}$$

Eftersom $\Theta(\theta)$ ska bli 2π-periodisk, måste $k \geq 0$ – säg att $k = \mu^2$, med $\mu \geq 0$. Då fås

$$\Theta = A \cos(\mu\theta) + B \sin(\mu\theta).$$

Villkoret $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ visar att $\cos(\mu\theta + \mu \cdot 2\pi) = \cos(\mu\theta)$, och motsvarande för sinus. Men då cosinus och sinus är 2π-periodiska, visar detta att $\mu \cdot 2\pi$ måste vara en heltalsmultipel av 2π, så att $\mu = m$, där $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Vi får därmed följande Θ-funktioner:

$$\Theta = \Theta_m = a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta).$$

Med $k = m^2$ och med beaktande av randvillkoren i r-led fås nu följande egenvärdesproblem för R:

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - m^2 R + \lambda^2 r^2 R = 0, & 0 < r < 1, \\ R(0) = \text{begränsad}, \ R(1) = 0. \end{cases}$$

(c) *Visa att detta egenvärdesproblem för $R(r)$ kan formuleras som ett Sturm-Liouville problem med viktsfunktionen lika med r, så att egenfunktionerna bildar en ortogonal bas för $\mathcal{L}_r^2(0,\infty)$.*
Förklara sedan hur variabelbytet $r \mapsto x = r\lambda$ gör att differentialekvationen för R övergår i

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0, \quad 0 < x < \infty. \qquad \text{(1p)}$$

Lösning: En Sturm-Liouvilleekvation är av formen

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0,$$

där $w(x)$ är en viktsfunktion. Genom att dividera R-ekvationen ovan med r fås precis en sådan ekvation:

$$rR'' + R' - \frac{m^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0 \iff (rR')' - \frac{m^2}{r}R + \lambda^2 rR = 0,$$

där $w(r) = r$. Alltså vet vi från Sturm-Liouvillesatsen att egenfunktionerna till egenvärdesproblemet ovan automatiskt kommer att bilda en ortogonal bas för $\mathcal{L}_r^2(0,1)$.
Med $x = r\lambda$ blir

$$R(r) = R\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \text{funktion av } x = y(x), \text{ säg.}$$

Kedjeregeln ger sedan att

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dr} = \frac{dy}{dx}\cdot\lambda \text{ och } \frac{d^2R}{dr^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\lambda^2,$$

så att R-ekvationen $r^2R'' + rR' - m^2R + \lambda^2r^2R = 0$ omvandlas till

$$x^2y'' + xy' - m^2y + x^2y = 0,$$

vilket är *Bessels differentialekvation av ordning* m.

(d) Härled *en lösning till $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$, som bortsett från en proportionalitetsfaktor blir Besselfunktionen av första slaget av ordningen m:*

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: För detaljerna hänvisas till avsnitt **4.7** i Asmars bok.
Frobeniusansatsen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ ger indexekvationen $r^2 - m^2 = 0 \iff r = \pm m$; välj $r = +m$! Utmärkande för just Bessel är att koefficienten a_1 måste bli noll. Eftersom rekursionsformeln för koefficienterna blir

$$a_n = \frac{-1}{n(n+2m)}a_{n-2} \quad \text{för } n = 2, 3, 4, \ldots,$$

där a:s index alltså hoppar två steg, följer det att alla a med *udda* index blir lika med noll. Då n är jämnt, säg att $n = 2k$, fås

$$a_{2k} = \frac{-1}{2^2 k(k+m)} a_{2(k-1)}, \quad \text{för } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Härur följer enkelt en formel $a_{2k} = (\text{nånting}) \cdot a_0$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$, varpå insättning i ursprungsansatsen ger att $y(x)$ bortsett från en proportionalitetsfaktor blir precis $J_m(x)$.

(e) *Man kan visa (se till exempel BETA) att allmänna lösningen till* $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$ *ges av*

$$y = A \cdot J_m(x) + B \cdot Y_m(x),$$

där $Y_m(x)$ *är obegränsad då* $x \to 0$*. Använd detta för att bestämma egenvärden och egenfunktioner till egenvärdesproblemet för* $R(r)$*.*

Tillämpa sedan superpositionsprincipen för att ange den allmänna lösningen $u(r, \theta, t)$ *till PDE +* $(RV)_r + (RV)_\theta + (BV)_2$*.* (1p)

Lösning: Om vi sätter in att $x = \lambda r$, så ser vi att

$$R(r) = A \cdot J_m(\lambda r) + B \cdot Y_m(\lambda r).$$

Randvillkoret $R(0)$ =begränsad visar att $B = 0$, och villkoret $R(1) = 0$ visar att $J_m(\lambda) = 0$, så att egenvärdet λ *är ett nollställe till* $J_m(x)$. Traditionellt betecknas de positiva nollställena till $J_m(x)$ med α_{mn}, där $n = 1, 2, 3, \ldots$, så slutsatsen blir att

$$\lambda = \lambda_{mn} = \alpha_{mn},$$

och

$$R = R_{mn}(r) = J_m(\alpha_{mn} r) \quad \text{för } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ och } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Därmed ser vi att ansatsen $u(r, \theta, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot T(t)$ ger

$$u_{mn}(r, \theta, t) = J_m(\alpha_{mn} r) \cdot (a_m \cos(m\theta) + b_m \sin(m\theta)) \cdot \cos(\alpha_{mn} t),$$

för $m = 0, 1, 2, \ldots$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Superpositionsprincipen tillämpad på (PDE)+$(\mathrm{RV})_r$+$(\mathrm{RV})_\theta$+$(\mathrm{BV})_2$ visar sedan att allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot u_{mn}(r, \theta, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\alpha_{mn} r)(a_{mn} \cos(m\theta) + b_{mn} \sin(m\theta)) \cos(\alpha_{mn} t), \end{aligned}$$

där $a_{mn} = c_{mn} a_m$ och $b_{mn} = c_{mn} b_m$.

(f) *För att satisfiera det återstående villkoret* $(BV)_1$ *krävs dessutom att*

$$u(r\theta, 0) = (1 - r^2) \cdot r^2 \sin 2\theta.$$

Dra härur slutsatsen att man måste bestämma koefficienter c_n *som uppfyller*

$$(1 - r^2)r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot J_2(\alpha_{2n} r),$$

där α_{2n} *är det* n*:te positiva nollstället till* $J_2(x)$*.* (1p)

Lösning: För att hitta en lineärkombination som uppfyller $(\mathrm{BV})_1$: $u(r, \theta, 0) = (1 - r^2) \cdot r^2 \sin 2\theta$ räcker det uppenbarligen att ta $m = 2$, och bara ta med sinustermen, det vill säga:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_2(\alpha_{2n} r) c_n \sin(2\theta) \cos(\alpha_{2n} t),$$

där $c_n = b_{2n}$, så att

$$(1 - r^2)r^2 \sin(2\theta) = u(r, \theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_2(\alpha_{2n} r) \sin(2\theta).$$

Genom att förkorta bort $\sin(2\theta)$ ser vi att vi måste hitta koefficienter c_n som uppfyller

$$(1 - r^2)r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_2(\alpha_{2n} r).$$

(g) *Från egenfunktionernas ortogonalitet (eller enklare genom att titta i BETA) ger ekvationen ovan att*

$$c_n = \frac{2}{J_3^2(\alpha_{2n})} \int_0^1 (1 - r^2) r^2 \cdot J_2(\alpha_{2n} r) r \, dr \quad \text{(ELLER HUR?).}$$

För att beräkna dessa integraler är det lämpligt att först visa två hjälpsatser:

$$\frac{d}{dx}(x^{m+1} \cdot J_{m+1}(x)) = x^{m+1} \cdot J_m(x); \qquad \text{(1p)}$$

$$\int_0^1 (1 - r^2) r^{m+1} \cdot J_m(\alpha r) \, dr = \frac{2}{\alpha^2} J_{m+2}(\alpha). \qquad \text{(1p)}$$

Lösning: Först ser vi att

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m+1}\cdot J_{m+1}(x)\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m+1)!}\frac{x^{2n+2m+2}}{2^{2n+m+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m+1)!}\cdot 2(n+m+1)\cdot\frac{x^{2n+2m+1}}{2^{2n+m+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+m)!}\frac{x^{2n+m}}{2^{2n+m}}\cdot x^{m+1} = x^{m+1}\cdot J_m(x),$$

och sedan, genom variabelbytet $r = x/\alpha, dr = dx/\alpha$ och partiell integration:

$$\int_0^1 (1-r^2)r^{m+1}\cdot J_m(\alpha r)\,dr = \int_0^\alpha \left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\frac{x^{m+1}}{\alpha^{m+1}}J_m(x)\frac{dx}{\alpha}$$
$$= \frac{1}{\alpha^{m+2}}\int_0^\alpha x^{m+1}J_m(x)\,dx - \frac{1}{\alpha^{m+4}}\int_0^\alpha x^{m+3}J_m(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\alpha^{m+2}}\left[x^{m+1}J_{m+1}(x)\right]_0^\alpha - \frac{1}{\alpha^{m+4}}\int_0^\alpha x^{m+1}J_m(x)\cdot x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{\alpha}J_{m+1}(\alpha) - \frac{1}{\alpha^{m+4}}\left[x^{m+1}J_{m+1}(x)\cdot x^2\right]_0^\alpha + \frac{1}{\alpha^{m+4}}\int_0^\alpha x^{m+1}J_{m+1}\cdot 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{\alpha}J_{m+1}(\alpha) - \frac{1}{\alpha}J_{m+1}(\alpha) + \frac{2}{\alpha^{m+4}}\left[x^{m+2}J_{m+2}(x)\right]_0^\alpha$$
$$= \frac{2}{\alpha^2}J_{m+2}(\alpha).$$

(h) *Använd dessa hjälpsatser för att beräkna koefficienterna c_n och skriv sedan (TILL SLUT!) upp det sökta svaret.* (1p)

Lösning: Den andra hjälpsatsen visar att

$$c_n = \frac{2}{J_3^2(\alpha_{2n})}\cdot\frac{2}{\alpha_{2n}^2}J_4(\alpha_{2n}) = \frac{4J_4(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}^2\cdot J_3^2(\alpha_{2n})},$$

så att slutsvaret blir

$$u(r,\theta,t) = 4\sin(2\theta)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_4(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}^2 J_3^2(\alpha_{2n})}\cdot J_2(\alpha_{2n}r)\cdot\cos(\alpha_{2n}t).$$

3. *Betrakta det allmänna Dirichletproblemet för det övre halvplanet:*

PDE	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$	$-\infty<x<\infty,\ y>0;$
$(\mathrm{RV})_{y=0}$	$u(x,0)=f(x)\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}),$	$-\infty<x<\infty;$
$(\mathrm{RV})_{y\to\infty}$	$u(x,y)$ är begränsad då $y\to\infty,$	$-\infty<x<\infty.$

(a) *Det är lämpligt att lösa detta problem genom att Fouriertransformera i x-variabeln − det vill säga, inför*

$$\hat{u}(\omega, y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\omega x}\,dx.$$

Observera att $(RV)_{y\to\infty}$ övergår i kravet att $\hat{u}(\omega, y)$ är begränsad då $y \to \infty$; beakta detta dels då $\omega < 0$ och dels då $\omega > 0$.
Visa genom att först beräkna $\hat{u}(\omega, y)$ och sedan transformera tillbaka att lösningen ges av Poissons integralformel:

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{(x-v)^2+y^2}\,dv. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: På transformsidan övergår differentialekvationen i

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} - \omega^2 \hat{u} = 0,$$

med lösningen

$$\hat{u}(\omega, y) = A(w)e^{\omega y} + B(\omega)e^{-\omega y}.$$

Villkoret att $\hat{u}(\omega, y)$ är begränsad då $y \to \infty$ visar att $A(\omega) = 0$ då $\omega > 0$ och $B(\omega) = 0$ då $\omega < 0$. Så

$$\hat{u}(\omega, y) = C(\omega)e^{-|\omega|y}$$

med

$$C(\omega) = \begin{cases} A(\omega) & \text{då } \omega < 0 \quad (\text{det vill säga } \omega = -|\omega|), \\ B(\omega) & \text{då } \omega > 0. \end{cases}$$

Eftersom

$$\hat{u}(\omega, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \hat{f}(\omega),$$

så ger $y = 0$ att

$$\hat{f}(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = C(\omega),$$

vilket innebär att lösningen på transformsidan blir

$$\hat{u}(\omega, y) = \hat{f}(\omega)\cdot e^{-|\omega|y}.$$

Enligt BETA är $e^{-|\omega|y}$ lika med Fouriertransformen av

$$g(x,y) = \frac{y}{\pi}\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Faltningssatsen visar till slut att

$$u(x,y) = f(x) * g(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(v)}{(x-v)^2+y^2}.$$

(b) *Använd denna integralformel för att visa att lösningen i specialfallet då*

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \pi & \text{när } |x| < a, \\ 0 & \text{när } |x| > a, \end{cases}$$

där a är något positivt tal, ges av

$u(x,y) =$vinkeln vid punkten (x,y) i triangeln med hörn i punkterna (x,y), $(-a,0)$ och $(a,0)$.

OBS: Diskutera de olika fallen $x < -a$, $-a < x < a$ och $x > a$ var för sig! (2p)

Lösning:

$$u(x,y) = y\int_{-a}^{a} \frac{dv}{y^2 + (x-v)^2} = \int_{-a}^{a} \frac{1}{y} \frac{1}{1 + \left(\frac{v-x}{y}\right)^2}\, dv$$

$$= \left[\arctan\frac{v-x}{y}\right]_{-a}^{a} = \arctan\frac{a-x}{y} - \arctan\frac{-a-x}{y}$$

$$= \arctan\frac{x-(-a)}{y} - \arctan\frac{x-a}{y} \quad \text{(observera att arctan är udda!).}$$

Betrakta triangeln med hörn i $A = (x,y)$, $B = (-a,0)$, $C = (a,0)$, och inför dessutom punkten $D = (x,0)$. *RITA FIGURER* i fallen då $x > a$, $-a < x < a$ respektive $x < -a$!
Vår uppgift är att visa att

$$u(x,y) = \widehat{BAC} = \text{ vinkeln vid } A \text{ i triangeln } BAC.$$

Då $x > a$ blir

$$\arctan\frac{x-(-a)}{y} = \widehat{BAD} \text{ och } \arctan\frac{x-a}{y} = \widehat{CAD},$$

så $u(x,y) = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \widehat{BAC}$.
Då $-a < x < a$ kan vi skriva

$$u(x,y) = \arctan\frac{x-(-a)}{y} + \arctan\frac{a-x}{y} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC}.$$

Slutligen, då $x < -a$ är

$$u(x,y) = \arctan\frac{a-x}{y} - \arctan\frac{-a-x}{y} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \widehat{BAC}.$$