Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen i 5B1215 Partiella differentialekvationer för ME och K, 05–03–31, kl. 14.00–19.00.

- Hjälpmedel: BETA.
- Man kan få maximalt 18 poäng på denna tentamensskrivning, så tillsammans med bonuspoängen kan man som mest få 24 poäng.
- Poänggränser: 10–14 p ger betyget 3, 15–19 p ger betyget 4, och 20–24 p ger betyget 5.

1. *Lös följande Dirichletproblem:*

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \text{då } 0<x<1 \text{ och } 0<y<1; \\ (\text{RV})_x & u(0,y)=0 \text{ och } u(1,y)=0 & \text{då } 0<y<1; \\ (\text{RV})_y & u(x,0)=\sin 7\pi x \text{ och } u(x,1)=0 & \text{då } 0<x<1. \end{array}$$

Kontrollera *också att ditt svar verkligen är en lösning!* (4p)

Lösning: Sätter man in separationsansatsen $u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$ i PDE + $(\text{RV})_x$ + $(\text{RV})_{y=1}$ så får man

$$X(0)=X(1)=0,\ Y(1)=0 \quad \text{och}$$
$$\frac{X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)}=0 \iff \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\text{konstant}=k,$$

vilket ger egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} X''(x)-k\cdot X(x)=0, & 0<x<1, \\ X(0)=X(1)=0, \end{cases}$$

med de välkända lösningarna $k_n = -n^2\pi^2$ och $X_n(x) = \sin(n\pi x)$ för $n = 1,2,3,\ldots$.
För $Y(y)$ fås därmed

$$Y_n''(y)-n^2\pi^2\,Y_n(y)=0 \iff Y_n(y)=A_n e^{n\pi y}+B_n e^{-n\pi y}.$$

Randvärdet då $y = 1$ ger sedan att

$$\begin{aligned} &0=Y_n(1)=A_n e^{n\pi}+B_n e^{-n\pi} \Longrightarrow B_n=-e^{2n\pi}\cdot A_n \\ &\Longrightarrow Y_n=A_n(e^{n\pi y}-e^{2n\pi}\cdot e^{-n\pi y})=A_n e^{n\pi}(e^{n\pi(y-1)}-e^{n\pi(1-y)}) \\ &=-A_n e^{n\pi}(e^{n\pi(1-y)}-e^{-n\pi(1-y)})=-2A_n e^{n\pi}\cdot\sinh(n\pi(1-y)), \end{aligned}$$

vilket betyder att bortsett från en proportionalitetskonstant blir

$$Y_n(y) = \sinh(n\pi(1-y)).$$

Superpositionsprincipen visar sedan att allmänna lösningaen till PDE + $(\mathrm{RV})_x$ + $(\mathrm{RV})_{y=1}$ ges av

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi(1-y)).$$

Det återstående randvillkoret $u(x,0) = \sin 7\pi x$ tillfredsställs genom att välja koefficienterna c_n så att

$$\sin 7\pi x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi),$$

vilket uppenbarligen åstadkomms genom att sätta $c_7 \sinh(7\pi) = 1$ och övriga $c_n = 0$. Vi får därmed lösningen

$$u(x,y) = \frac{\sin(7\pi x)\,\sinh(7\pi(1-y))}{\sinh(7\pi)},$$

och det är *väldigt* lätt att kontrollera att detta *är* den sökta lösningen.

2. *Bestäm jämviktstemperaturen i det ihåliga klotet* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ *då temperaturen på utsidan* $\{x^2+y^2+z^2=4\}$ *är identiskt noll, och temperaturen på insidan* $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ *är invariant under rotationer runt* z*-axeln.*

   Ledning: *Inför sfäriska koordinater* r, θ *och* ϕ*. Eftersom randvillkoren är oberoende av* ϕ*, så blir även jämviktstemperaturen* u *det, vilket betyder att* $u = u(r,\theta)$*. Matematiskt formuleras problemet ovan på följande sätt:*

PDE	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta\,\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0$	då $1 < r < 2$ och $0 < \theta < \pi$;
$(\mathrm{RV})_r$	$u(1,\theta) = f(\theta) =$ given funktion, $u(2,\theta) = 0$	då $0 < \theta < \pi$;
$(\mathrm{RV})_\theta$	$u(r,0)$ och $u(r,\pi)$ är begränsade	då $1 < r < 2$.

   (a) *Gör separationsansatsen* $u(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta)$ *och visa att man får skilda problem för* $R(r)$ *och* $\Theta(\theta)$*.*

   För att lösa Θ*-problemet är det lämpligt att byta den oberoende variabeln* θ *mot den nya variabeln* $s = \cos\theta$*, och den beroende variabeln* $\Theta(\theta)$ *mot* $\Theta(\arccos s) = y(s)$*.*

   Visa att $y(s)$ *satisfierar egenvärdesproblemet*

$$\begin{cases} (1-s^2)y''(s) - 2sy'(s) + \lambda\cdot y = 0, & -1 < s < 1, \\ y(-1) \text{ och } y(1) \text{ är begränsade,} \end{cases}$$

och verifiera att detta är ett (singulärt) Sturm-Liouvilleproblem med viktsfunktionen 1, så att egenfunktionerna automatiskt bildar en ortogonal bas för $\mathcal{L}^2(-1,1)$. (2p)

Lösning: $u(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta)$ insatt i PDE + $(\text{RV})_{r=2}$ + $(\text{RV})_\theta$ ger

$$\begin{aligned} &R(2) = 0, \quad \Theta(0) \text{ och } \Theta(\pi) \text{ är begränsade, och} \\ &\frac{R''\Theta + \frac{2}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}(R\Theta'' + \cot\theta R\Theta')}{\frac{1}{r^2}\cdot R\cdot\Theta} = 0 \\ \iff\ &\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \cot\theta\,\Theta}{\Theta} = \text{konstant} = \lambda, \end{aligned}$$

vilket leder till R-ekvationen

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \quad 1 < r < 2,$$

och följande egenvärdesproblem för Θ:

$$\begin{cases} \Theta'' + \cot\theta\cdot\Theta' + \lambda\cdot\Theta = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \Theta(0) \text{ och } \Theta(\pi) \text{ är begränsade.} \end{cases}$$

Variabelbytena $s = \cos\theta$ och $y(s) = \Theta(\arccos s)$ ger med hjälp av kedjeregeln att

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{d\theta} &= \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta} = y'(s)\cdot(-\sin\theta) \Longrightarrow \cot\theta\cdot\Theta' = -\cos\theta\cdot y(s) = -s\cdot y(s), \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} &= y''(s)\cdot\sin^2\theta - y'(s)\cdot\cos\theta = (1-\cos^2\theta)y''(s) - sy'(s) \\ &= (1-s^2)y''(s) - sy'(s), \end{aligned}$$

så att egenvärdesproblemet ovan övergår i

$$\begin{cases} (1-s^2)y'' - 2sy' + \lambda\, y = 0, \quad -1 < s < 1, \\ y(-1) \text{ och } y(1) \text{ är begränsade.} \end{cases}$$

Differentialekvationen som uppträder här kan skrivas som $((1-s^2)y')' + \lambda\, y = 0$, och är därmed av Sturm-Liouvilletyp med viktsfunktionen 1.

(b) *Man kan visa att villkoren att $y(-1)$ och $y(1)$ ska vara begränsade tvingar lösningarna $y(s)$ att bli* polynom. *Använd detta för att bestämma egenvärdena λ. Motsvarande egenfunktioner kan normeras så att $y(1) = 1$, och kallas då för* Legendrepolynom. *Härled de tre första Legendrepolynomen.* (4p)

Lösning: Om man sätter in ansatsen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_j\, s^j$ i

$$y'' - s^2y'' - 2sy' + \lambda\, y = 0$$

så fås

$$\sum_{j=2}^{\infty} a_j\, j(j-1)\, s^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, j(j-1)\, s^j - 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, j\, s^j + \lambda \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, s^j = 0.$$

Skriver man om den första summan som $\sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}\,(j+2)(j+1)\,s^j$ så får man

$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_{j+2}\,(j+1)(j+2) - a_j(j(j-1) + 2j - \lambda)]\, s^j = 0,$$

varur man sluter att

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+1)(j+2)} a_j \qquad \text{för } j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Eftersom man här hoppar två steg (från j till $j+2$), så kommer alla a_j med *jämnt* index att bli multipler av a_0, och alla a_j med *udda* index att bli multipler av a_1. Vi kan därför skriva lösningen som

$$y = a_0(1 + (\ldots)s^2 + \ldots) + a_1(s + (\ldots)s^3 + \ldots) = y_{\text{jämn}} + y_{\text{udda}}.$$

För att koefficienten a_{n+2} ska bli noll, så måste $\lambda = n(n+1)$, och då fås även att $a_{n+4} = a_{n=6} = \cdots = 0$.

n **jämnt:** $a_1 = 0 \Longrightarrow y_{\text{udda}} = 0$ och

$$y = y_{\text{jämn}} = a_0(1 + (\ldots)s^2 + \cdots + (\ldots)s^n) = \text{ polynom av graden } n;$$

n **udda:** $a_0 = 0 \Longrightarrow y_{\text{jämn}} = 0$ och

$$y = y_{\text{udda}} = a_1(s + (\ldots)s^3 + \cdots + (\ldots)s^n) = \text{ polynom av graden } n.$$

n**=0:**

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - 0}{(j+1)(j+2)}\, a_j \Longrightarrow a_2 = a_4 = \cdots = 0$$
$$\Longrightarrow y = a_0;\ a_0 = 1 \Longrightarrow \text{ Legendrepolynomet } P_0(s) = 1.$$

n**=1:**

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - 2}{(j+1)(j+2)} a_j \Longrightarrow a_3 = a_5 = \cdots = 0$$
$$\Longrightarrow y = a_1 s;\ a_1 = 1 \Longrightarrow \text{ Legendrepolynomet } P_1(s) = s.$$

n**=2:**

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - 2 \cdot 3}{(j+1)(j+2)} a_j \Longrightarrow a_4 = a_6 = \cdots = 0$$
$$\Longrightarrow y = a_0 + a_2 s^2, \text{ där } a_2 = -6/2 \cdot a_0 = -3a_0 \Longrightarrow$$
$$y = a_0(1 - 3s^2);\ a_0 = -1/2 \Longrightarrow \text{ Legendrepolynomet } P_2(s) = \frac{3s^2 - 1}{2}.$$

SLUTSATS: Egenvärdena blir $\lambda = n(n+1)$ och egenfunktionerna $\Theta = P_n(\cos\theta)$, där $n = 0, 1, 2, \ldots$ och $\{P_n\}$ är Legendrepolynom.

(c) *Bestäm de lösningar till R-ekvationen som svarar mot de funna egenvärdena.* Ledning*: Byt till exempel r mot e^t, så övergår differentialekvationen för R i en som har* konstanta *koefficienter.* (2p)

Lösning: $\lambda = n(n+1)$ ger följande differentialekvation för R:

$$r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0.$$

$$r = e^t \Longrightarrow \frac{dr}{dt} = e^t = r;\ y(t) = R(e^t) \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dR}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = R' \cdot r \text{ och } \frac{d^2y}{dt^2} = (R'' \cdot r + R') \cdot r = R'' \cdot r^2 + R' \cdot r,$$

varvid differentialekvationen övergår i

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0.$$

Tillhörande karakteristiska ekvation är

$$\lambda^2 + \lambda - n^2 - n = 0 \iff (\lambda^2 - n^2) + (\lambda - n) = 0$$

$$\iff (\lambda - n)(\lambda + n + 1) = 0 \iff \lambda = \begin{cases} n, \\ -n-1, \end{cases}$$

varför

$$R = A \cdot e^{nt} + B \cdot e^{-(n+1)t} = A \cdot r^n + B \cdot r^{-(n+1)}.$$

Randvillkoret $R(2) = 0$ ger därefter att

$$0 = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-(n+1)} \Longrightarrow B = -A \cdot 2^{2n+1}.$$

Bortsett från en proportionalitetsfaktor blir däför

$$R = \frac{2^{2n+1}}{r^{n+1}} - r^n = \frac{2^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

(d) *Använd superpositionsprincipen för att ange den allmänna lösningen till PDE + $(RV)_{r=2}$ + $(RV)_\theta$, och förklara sedan hur denna lösning kan specialiseras så att den även uppfyller $(RV)_{r=1}$.* (1p)

Lösning: Allmänna lösningen till PDE+$(\text{RV})_{r=2}$+$(\text{RV})_\theta$ blir således

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{2^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

För att satisfiera $(\mathrm{RV})_{r=1}$ ska koefficienterna a_n väljas så att

$$f(\theta) = u(1,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(2^{2n+1}-1)\cdot P_n(\cos\theta).$$

Från BETA ser man att detta innebär att

$$a_n\,(2^{2n+1}-1) = \frac{2n+1}{2}\cdot\int_0^{\pi} f(\theta)\cdot P_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta,$$

varför slutsvaret blir

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{2(2^{2n+1}-1)}\cdot\frac{2^{2n+1}-r^{2n+1}}{r^{n+1}}\cdot P_n(\cos\theta).$$

(e) *Beräkna lösningen i fallet då $f(\theta) = \cos^3\theta$.* (2p)

Lösning: Då $f(\theta) = \cos^3(\theta)$ fås

$$\cos^3(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(2^{2n+1}-1)\,P_n(\cos\theta),$$

eller, med $s = \cos\theta$,

$$s^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(2^{2n+1}-1)\,P_n(s).$$

Men nu ser man i BETA att

$$s^3 = \frac{3}{5}P_1(s) + \frac{2}{5}P_3(s),$$

så att a_n är noll då n är skilt från 1 och 3, medan

$$a_1\cdot(2^3-1) = \frac{3}{5} \quad \text{och} \quad a_3\cdot(2^7-1) = \frac{2}{5},$$

det vill säga,

$$a_1 = \frac{3}{5\cdot 7} = \frac{3}{35} \quad \text{och} \quad a_3 = \frac{2}{5\cdot 127} = \frac{2}{635}.$$

Från detta ser vi att

$$u(r,\theta) = \frac{3(2^3-r^3)}{35r^2}\cdot P_1(\cos\theta) + \frac{2(2^7-r^7)}{635r^4}\cdot P_3(\cos\theta),$$

där

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \quad \text{och} \quad P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta.$$

3. *Lös randvärdesproblemet*

PDE	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$	då $x > 0$ och $t > 0$;
RV	$u(0,t) = 0,\ u(x,t) =$ begränsad när $x \to \infty$	då $t > 0$;
BV	$u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$	då $x > 0$,

samt skissera lösningen då $t = 1$. (3p)

Lösning: Vi Laplacetransformerar med avseende på tiden, och sätter

$$U(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\,dt.$$

Laplacetransformering av PDE + BV ger

$$s^2 \cdot U(x,s) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,s) + \frac{1}{s^2},$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 \cdot U = -\frac{1}{s^2}.$$

Man ser direkt den homogena lösningen $U_{\text{hom}} = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx}$ och partikulärlösningen $U_{\text{part}} = 1/(s^4)$, så att

$$U(x,s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{1}{s^4}.$$

Eftersom $U(x,s)$ är begränsad då $x \to \infty$ måste $A(s) = 0$ för alla s, vilket innebär att

$$U(x,s) = B(s)e^{-sx} + \frac{1}{s^4}.$$

Det återstående randvillkoret $u(0,t) = 0$ ger att $U(0,s) = 0$, det vill säga

$$0 = B(s) + \frac{1}{s^4} \Longrightarrow B(s) = -\frac{1}{s^4}.$$

Därmed blir Laplacetransformen av den sökta lösningen lika med

$$U(x,s) = \frac{1}{s^4} - e^{-sx} \cdot \frac{1}{s^4}.$$

Inverstransformering ger sedan

$$u(x,t) = \frac{t^3}{3!} - \frac{(t-x)^3}{3!} \cdot H(t-x) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} - \frac{(t-x)^3}{6} & \text{då } 0 < x < t, \\ \frac{t^3}{6} & \text{då } x > t. \end{cases}$$

Speciellt är

$$u(x,1) = \begin{cases} \frac{1-(1-x)^3}{6} & \text{då } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{6} & \text{då } x > 1, \end{cases}$$

vars graf är lätt att rita.