Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1215/3 för ME och 5B1301 för K:
PARTIELLA DIFFERENTIALEKVATIONER
05–08–22, kl. 8.00–13.00.

- Hjälpmedel: BETA.
- Man kan få maximalt 18 poäng på den här tentamensskrivningen, så tillsammans med bonuspoängen kan man som mest få 24 poäng.
- Poänggränser: 10–14 poäng ger betyget 3, 15–19 poäng ger betyget 4, och 20–24 poäng ger betyget 5.

1. *Lös följande randvärdesproblem:*

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ \text{RV} & \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t > 0; \\ \text{BV} & u(x,0) = 8\sin^4 x & 0 < x < \pi, \end{array}$$

och kontrollera *sedan att ditt resultat stämmer.* (4p)

Lösning: Enligt EXAMPLE 1 i avsnitt 3.6 i läroboken har PDE + RV lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{-n^2 t} \cos(nx),$$

och det återstår bara att bestämma koefficienterna a_n så att även begynnelsevillkoret blir uppfyllt, det vill säga

$$u(x,0) = 8\sin^4 x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Eftersom $2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)$ och $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ (se BETA t.ex.), så är

$$\begin{aligned}8\sin^4 x =& 2 \cdot (2\sin^2 x)^2 = 2 \cdot (1 - \cos 2x)^2 \\ =& 2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x \\ =& 3 - 4\cos 2x + \cos 4x,\end{aligned}$$

varför man inser att $a_0 = 3$, $a_2 = -4$, $a_4 = 1$ och att övriga $a_n = 0$. Därmed får man SVARET

$$u(x,t) = 3 - 4\cos(2x)e^{-4t} + \cos(4x)e^{-16t}.$$

Koll av PDE:n:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 16\cos(2x)e^{-4t} - 16\cos(4x)e^{-16t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 16\cos(2x)e^{-4t} - 16\cos(4x)e^{-16t}.\end{aligned}$$

Koll av RV:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8\sin(2x)e^{-4t} - 4\sin(4x)e^{-16t} \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0.$$

2. *Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen*

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

med hjälp av Frobeniusansatsen, och visa sedan att denna lösning kan uttryckas med hjälp av elementära funktioner. (4p)

Lösning: Ansatsen $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ med $a_0 \neq 0$ ger att

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2};$$

insättes detta i differentialekvationen så fås:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2+r} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} a_n x^{n+r} = 0.\end{aligned}$$

Genom bytet $n \mapsto n-2$ kan den 3:e serien skrivas som $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r}$. Om man därefter dividerar med x^r överallt och tar ut termerna innehållande x^0 och x^1 för sig så får man

$$a_0\left[r(r-1)+r-\frac{1}{4}\right]+a_1\left[(1+r)r+(1+r)-\frac{1}{4}\right]x$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\left[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-\frac{1}{4}\right]+a_{n-2}\right)x^n=0.$$

Då koefficienten framför varje x-potens är noll och dessutom $a_0 \neq 0$, ser vi att

$$r^2-\frac{1}{4}=0, \tag{1}$$
$$a_1\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]=0, \tag{2}$$
$$a_n\left[(n+r)^2-\frac{1}{4}\right]+a_{n-2}=0 \quad \text{för} \quad n\geq 2. \tag{3}$$

Första ekvationen visar att $r=\pm 1/2$. Om $r=1/2$ insättes i (2) fås att $a_1=0$, medan $r=-1/2$ leder till $a_1\cdot 0=0$, så att a_1 blir *godtycklig.*

Låt oss studera fallet $r=-1/2$! Då är alltså a_0 och a_1 godtyckliga, och ekvation (3) leder till

$$a_n=\frac{-1}{n(n-1)}a_{n-2} \quad \text{för} \quad n\geq 2.$$

(1) $n=$ jämn $=2m$ och $a_0=A$ ger att

$$\begin{aligned} a_{2m}=&\frac{-1}{2m(2m-1)}a_{2(m-1)}\\ =&\frac{-1}{2m(2m-1)}\cdot\frac{-1}{(2m-2)(2m-3)}\cdots\frac{-1}{2\cdot 1}a_0\\ =&A\cdot\frac{(-1)^m}{(2m)!} \quad \text{för} \quad m=0,1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

(2) $n = \text{udda} = 2m-1$ och $a_1 = B$ ger att

$$\begin{aligned}
a_{2m-1} =& \frac{-1}{(2m-1)(2m-2)} a_{2m-3} \\
=& \frac{-1}{(2m-1)(2m-2)} \cdot \frac{-1}{(2m-3)(2m-4)} \cdots \frac{-1}{3 \cdot 2} a_1 \\
=& B \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} \quad \text{för} \quad m = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Tillsammans fås därmed lösningen

$$\begin{aligned}
y =& x^{-1/2} \cdot \left(A \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + B \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{(2m-1)!} \right) \\
=& A \cdot x^{-1/2} \cos x + B \cdot x^{-1/2} \sin x.
\end{aligned}$$

3. *Betrakta en oändligt lång cylinder med radien a, som i cylinderkoordinater ges av $\{0 \le r \le a,\ -\pi < \theta \le \pi,\ -\infty < z < \infty\}$. Om $u(r, \theta, z, t)$ betecknar temperaturen i punkten (r, θ, z) vid tiden t, så satisfierar u värmeledningsekvationen*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

där konstanten k är värmeledningskoefficienten. Låt oss anta att temperaturen är lika med noll på stavens mantelyta (det vill säga, $u(a, \theta, z) = 0$ för alla θ, z och t), och att begynnelsetemperaturen $u(r, \theta, z, 0)$ bara beror på r. I så fall kommer temperaturen u bara att bero på r och t: $u = u(r, t)$, och vi får då följande randvärdesproblem:

$$\begin{array}{lll}
\text{PDE} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = k \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right), & 0 < r < a,\ t > 0; \\
\text{RV} & u(0, t) = \text{ begränsad och } u(a, t) = 0, & t > 0; \\
\text{BV} & u(r, 0) = f(r) = \text{ given funktion}, & 0 \le r < a.
\end{array}$$

Visa att separationsansatsen $u(r, t) = R(r) \cdot T(t)$ insatt i PDE + RV leder till att $R(r)$ satisfierar Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases}
R''(r) + \dfrac{1}{r} R'(r) + (\text{konstant}) \cdot R(r) = 0, \\
R(0) = \text{ begränsad och } R(a) = 0,
\end{cases}$$

och att $T(t)$ satisfierar

$$T'(t) + k \cdot (\text{konstant}) \cdot T(t) = 0,$$

där (konstant) *är en separationskonstant.*

Eftersom temperaturen på cylinderns yta hålls vid noll grader hela tiden är det fysikaliskt uppenbart att $T(t) \to 0$ då $t \to \infty$. Visa att detta för med sig att separationskonstanten måste vara positiv, *så att vi kan sätta* (konstant) $= \lambda^2$, *där $\lambda > 0$.*

Visa *att R-ekvationen övergår i en Besselekvation av en viss ordning under variabelbytet $r \mapsto \lambda r = x$, och utnyttja detta för att plocka fram de möjliga λ-värdena och tillhörande egenfunktioner $R_\lambda(r)$.*

Då de möjliga värdena för (konstant) $= \lambda^2$ *är kända löses T-ekvationen, varefter superpositionsprincipen ger allmänna lösningen till PDE + RV.*

Bestäm till slut koefficienterna i superpositionen så att också begynnelsevillkoret blir uppfyllt. (4p)

Lösning: Separationsansatsen $u(r,t) = R(r) \cdot T(t)$ insatt i RV visar att $R(0)$ är begränsad och att $R(a) = 0$; insatt i PDE fås

$$\begin{aligned} \frac{R \cdot T'}{R \cdot T} &= \frac{k\left(R'' \cdot T + \frac{1}{r}R' \cdot T\right)}{R \cdot T} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{k} \cdot \frac{T'}{T} &= \frac{R'' + \frac{1}{r}R}{R} = (\text{konstant}). \end{aligned}$$

T-ekvationen $T' + k \cdot (\text{konstant}) \cdot T = 0$ har lösningen $T = C \cdot e^{-k(\text{konstant})t}$. Eftersom värmeledningskoefficienten k är positiv, ser vi att (konstant) *måste vara positiv* för att $T(t)$ ska gå mot 0 då $t \to \infty$. Vi kan därför sätta (konstant) $= \lambda^2$, där $\lambda > 0$.

Efter detta ser vi att $R(r)$ är lösning till följande Sturm-Liouville problem:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0, \\ R(0) = \text{begränsad}, \quad R(a) = 0. \end{cases}$$

Om vi sätter $x = \lambda r$, så blir $R(r) = R(x/\lambda)$, som vi uppfattar som en funktion av x. Med hjälp av kedjeregeln fås sedan

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \lambda \frac{dR}{dx},$$
$$\frac{d^2R}{dx^2} = \lambda \frac{d^2R}{dx^2} \frac{dr}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2R}{dx^2},$$

varför R-ekvationen övergår i

$$x^2 \frac{d^2R}{dx^2} + x\frac{dR}{dx} + x^2 R = 0,$$

som är en Besselekvation av ordningen 0, med allmänna lösningen

$$R(x) = AJ_0(x) + BY_0(x).$$

Med $x = \lambda r$ följer det alltså att

$$R(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r).$$

Då $R(0)$ är begränsad, medan $Y_0(0)$ är obegränsad, måste $B = 0$. $R(a) = 0 \Longrightarrow J_0(\lambda a) = 0$, så att λa är ett nollställe till J_0: $\lambda_n a = \alpha_n =$ n:te nollstället till J_0.

Därmed fås R-lösningarna

$$R_n(r) = A_n \cdot J_0\left(\alpha_n \cdot \frac{r}{a}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Med separationskonstanten $= \lambda^2 = \alpha_n^2/a^2$ blir sedan

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{k\alpha_n^2}{a^2}t}, \quad \text{för} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Så allmänna lösningen till PDE + RV blir

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) e^{-\frac{k\alpha_n^2}{a^2}t}.$$

Det återstår sedan att välja koefficienterna c_n så att BV blir uppfyllt:

$$f(r) = u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\alpha_n \frac{r}{a}\right).$$

Från BETA hämtar vi följande uttryck för c_n:

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^a f(r) J_0\left(\alpha_n \frac{r}{a}\right) r\,dr,$$

och får till slut SVARET:

$$u(r,t) = \frac{2}{a^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(\alpha_n)} \cdot \int_{x=0}^{a} f(x) J_0\left(\alpha_n \frac{x}{a}\right) x\,dx \cdot J_0\left(\alpha_n \frac{r}{a}\right) \cdot e^{-k\frac{\alpha_n^2}{a^2}t}.$$

4. *I föregående tal användes* superpositionsprincipen *för PDE + RV.* Förklara *vad denna princip innebär och* varför den fungerar *i detta konkreta fall!* (2p)

Lösning: SUPERPOSITIONSPRINCIPEN säger att om funktionerna $u_1(r,t), \ldots, u_N(r,t)$ är lösningar till

PDE $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

och

RV $$u(0,t) = \text{begränsad}, \quad u(a,t) = 0,$$

så är *varje* superposition (eller lineärkombination om man så vill) $u(r,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(r,t)$ *också* en lösning till PDE + RV.

Bevis: Att $u(r,t)$ satisfierar PDE:n är det samma som att

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) u = 0.$$

Detta följer därigenom att

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} c_n u_n\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{N} c_n \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) u_n = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot 0 = 0.$$

Vidare är

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(0,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot \text{något begränsat} = \text{begränsad},$$

och

$$u(a,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(a,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot 0 = 0,$$

så superpositionen uppfyller också RV.

5. *Använd Fouriertransformering för att lösa begynelsevärdesproblemet*

$$\begin{array}{lll} \text{PDE} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u + g(x), & -\infty < x < \infty,\ t > 0; \\ \text{BV} & u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{array}$$

där $g(x)$ och $f(x)$ är givna absolutintegrabla funktioner på $\mathbb{R}$.

Lösningen $u(x,t)$ skall skrivas som en summa av två enkelintegraler, varav den ena är en faltningsintegral innehållande begynnelsevärdesfunktionen $f(x)$, och den andra är en inverstransform som är oberoende av $f(x)$. (4p)

Lösning: Låt $\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}\,dx$ vara Fouriertransformen av $u(x,t)$ i x-led. Härur fås att

$$\hat{u}(\omega,0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \hat{f}(\omega).$$

Fouriertransformering av PDE:n med avseende på x ger

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} = (i\omega)^2\hat{u}(\omega,t) - 2\hat{u}(\omega,t) + \hat{g}(\omega) \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} + (\omega^2+2)\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Eftersom det inte förekommer några derivator med avseende på t, så kan vi betrakta denna ekvation som en *ordinär differentialekvation* i t för varje fixt ω. Man ser direkt att

$$\hat{u}_{\text{hom}} = C(\omega)e^{-(\omega^2+2)t} \quad \text{och} \quad \hat{u}_{\text{part}} = \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2},$$

så att

$$\hat{u}(\omega,t) = C(\omega)e^{-(\omega^2+2)t} + \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2}.$$

Sätter man här in $t = 0$ får man

$$\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}(\omega) = C(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2},$$

vilket betyder att

$$C(\omega) = \hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2}.$$

Därmed blir

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t} \cdot e^{-2t} + \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2}(1 - e^{-(\omega^2+2)t}).$$

Det återstår att inverstransformera detta uttryck så att vi får tillbaka variabeln x istället för ω. Eftersom det är välbekant att $e^{-\omega^2 t}$ är Fouriertransformen av

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

ser vi att inverstransformen av $\hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t}$ blir en faltning, medan den andra termen får inverstransformeras med hjälp av den allmänna inversionsformeln:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\frac{e^{-2t}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot e^{-\frac{(x-v)^2}{4t}}\, dv \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega)}{\omega^2+2}(1 - e^{-(\omega^2+2)t})e^{i\omega x}\, d\omega. \end{aligned}$$