Institutionen för Matematik, KTH,
Olle Stormark.

Tentamen och lösningsförslag till
5B1215 Komplexa funktioner för ME, 05–08–29, kl. 8.00–12.00.

- Hjälpmedel: BETA (och ingenting annat).
- Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
- Om lappskrivning j är godkänd (där $j = 1$ eller 2), så fås automatiskt 3 poäng på uppgift j.
- Betygsgränser: 9–11 poäng ger betyget 3, 12–14 poäng ger betyget 4, och 15–18 poäng ger betyget 5.

1. *Bestäm och rita bilden av rektangeln* $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \leq Re\, z \leq 1,\ 1 \leq Im\, z \leq 2\}$ *under avbildningn* $w = e^z$.

   Lösning: $z = x + iy$, där $0 \leq x \leq 1$ och $1 \leq y \leq 2$.

   $$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} \iff |w| = e^x \text{ och } \arg w = y + n \cdot 2\pi$$
   $$\Rightarrow e^0 \leq |w| \leq e^1 \text{ och } 1 \leq \arg w \leq 2,$$

   så att bildfiguren begränsas av cirklarna $\{|w| = 1\}$ och $\{|w| = e\}$, samt av halvstrålarna $\{\arg w = 1\}$ och $\{\arg w = 2\}$.

2. *Visa först att den reella funktionen* $u(x, y) = x^2 - y^2 - y$ *är harmonisk i hela* (x, y)*-planet, och bestäm sedan en komplex funktion* $f(z)$ *som är deriverbar i hela* z*-planet och uppfyller* $Re\, f(z) = u(x, y)$.

   Lösning: Rättframma räkningar ger att $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 2 - 2 = 0$, så u är harmonisk överallt.

   För att bestämma $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ använder vi Cauchy-Riemannekvationerna:

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Den första visar att

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \Rightarrow v = 2xy + g(x),$$

varefter den andra säger att

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + g'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 1 \\ &\Rightarrow g'(x) = 1 \iff g(x) = x + C \Rightarrow v = 2xy + x + C, \end{aligned}$$

där C är en godtycklig (reell) konstant. Därmed blir

$$\begin{aligned} f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) &= x^2 + i \cdot 2xy - y^2 + ix - y + iC \\ &= (x+iy)^2 + i(x+iy) = z^2 + iz + iC. \end{aligned}$$

3. *Visa att funktionen* $f(z) = \bar{z}$ inte *är deriverbar genom att undersöka gränsvärdet av differenskvoten*

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

då $\Delta z \to 0$.

Lösning: I vårt fall blir differenskvoten

$$\frac{\overline{(z+\Delta z)} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Observera att $\Delta z \to 0 \iff \Delta x \to 0$ och $\Delta y \to 0$.

(1) Om $\Delta y \to 0$ först och $\Delta x \to 0$ sedan, så fås

$$\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \to \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

(2) Om däremot $\Delta x \to 0$ först, så fås istället

$$\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \to \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Eftersom man således får olika resultat beroende på *hur* $\Delta z \to 0$, så finns inget gränsvärde.

4. Beräkna *alla lösningarna till ekvationen*

$$\cos z = 5.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 5 \iff & \left(e^{iz}\right)^2 - 10\, e^{iz} + 1 = 0 \\
\iff & e^{iz} = 5 \pm \sqrt{25-1} = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad (\text{som är} > 0) \\
\iff & iz = \log(5 \pm 2\sqrt{6}) = \ln(5 \pm \sqrt{6}) + i \cdot 2\pi n \\
\iff & z = 2\pi n - i \ln(5 \pm 2\sqrt{6}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.
\end{aligned}$$

5. *Härled en konform avbildning av vinkelområdet* $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/6 < \arg z < \pi/6\}$ *på enhetsskivan* $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$.

Lösning: Om vi först sätter $z_1 = e^{i\pi/6} z$, så vrids vinkelområdet vinkeln $\pi/6$ till $\{z_1 \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z_1 < \pi/3\}$. Sätter vi där efter $z_2 = (z_1)^3 = e^{i\pi/2} z^3 = iz^3$, så tredubblas vinkeln och vi får området $\{z_2 \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z_2 < \pi\}$ = övre z_2-halvplanet. Med hjälp av spegelpunkterna $\pm i$ till reella axeln kan detta sedan avbildas på enhetsskivan med hjälp av standardavbildningen

$$w = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} = \frac{iz^3 - i}{iz^3 + i} = \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}.$$

6. *Lös följande randvärdesproblemproblem i det övre halvplanet:*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \ -\infty < x < \infty \text{ och } y > 0,$$

$$g(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{då } x < -1 \\ 20 & \text{då } x > 1 \end{cases} \quad \text{och} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \text{då} \ -1 < x < 1.$$

Lösning: Enligt BETA avbildas halvbandet $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2,\ \mathrm{Imz} > 0\}$ konformt på övre halvplanet genom $w = \sin z$. Om vi inverterar denna avbildning och sätter $w = \arcsin z$, så kommer övre z-halvplanet att avbildas konformt på halvbandet $\{w \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Om vi sätter $w = u + iv$ och observerar att normalvektorer på grund av konformiteten avbildas på normalvektorer, övergår därmed ursprungsproblemet till följande problem i (u, v)-planet:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{då} \quad -\pi/2 < u < \pi/2 \text{ och } v > 0,\\
&g(-\pi/2, v) = 0 \quad \text{då } v > 0,\\
&\frac{\partial g}{\partial v}(u, 0) = 0 \quad \text{då } -\pi/2 < u < \pi/2,\\
&g(\pi/2, v) = 20 \quad \text{då } v > 0.
\end{aligned}$$

Laplaces ekvation och villkoret för $\partial g/\partial v$ är uppfyllda om $g(u, v) = au + b$, där a och b är konstanter. Låt oss se till att övriga villkor också blir uppfyllda:

$$\begin{aligned}
&0 = g(-\pi/2, v) = a \cdot (-\pi/2) + b \Rightarrow b = a \cdot \pi/2 \Rightarrow g = a \cdot (u + \pi/2),\\
&20 = g(\pi/2, v) = a \cdot (\pi/2 + \pi/2) = a\pi \Rightarrow a = 20/\pi\\
&\Rightarrow g = \frac{20}{\pi} u + 10 = 10 + \frac{20}{\pi} \operatorname{Re} w.
\end{aligned}$$

Med $w = \arcsin z$ fås till slut att

$$g(x, y) = 10 + \frac{20}{\pi} \text{Re } \arcsin z.$$