Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2006-03-08, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3, och 5B1301 Matematik f.k. för K.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen och randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = -n^2$ och $X(x) = B\sin nx$.

Ekvationen för T blir nu $T'' + 4n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = a\cos 2nt + b\sin 2nt.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin nx(a\cos 2nt + b\sin 2nt), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx(a_n\cos 2nt + b_n\sin 2nt).$$

Nu ska begynnelsevillkoren satisfieras. Vi har

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx,$$

så jämförelse med de givna begynnelsevillkoren ger direkt att

$$a_3 = 5, \qquad a_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 3,$$

$$2 \cdot 4 \cdot b_4 = 8, \qquad 2nb_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 4$$

Vi får därmed svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = 5 \sin 3x \cos 6t + \sin 8t \sin 4t.$$

2. Låt

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Enligt BETA och givet initialvärde gäller då

$$\hat{u}(\omega, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$4 \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u}.$$

Denna differentialekvation i t (linjär med konstanta koefficienter) har den allmän lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{4} t}.$$

Insättning av $t = 0$ ger att

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

och vi får

$$\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}} e^{-\frac{\omega^2}{4} t} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2 (t+1)}{4}},$$

som efter tillbakatransformering med hjälp av BETA ger svaret

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} e^{-\frac{x^2}{t+1}}.$$

3. a) Vi har

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^{n+r},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r},$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2},$$

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^{n+r}.$$

Detta ger

$$2xy'' + (2-x)y' + \lambda y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(2(n+r+1)(n+r) + 2(n+r+1))a_{n+1} - (n+r-\lambda)a_n]x^{n+r} +$$

$$+(2((-1)+r+1)((-1)+r) + 2((-1)+r+1))a_0$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r+1)^2 a_{n+1} - (n+r-\lambda)a_n]x^{n+r} + 2r^2 a_0.$$

Detta ska vara $= 0$, vilket ger “indexekvationen” $r^2 = 0$, med $r = 0$ som enda lösning, och rekursionsformeln

$$a_{n+1} = \frac{n+r-\lambda}{2(n+r+1)^2} a_n,$$

dvs. (då $r = 0$),

$$a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{2(n+1)^2} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

b) Då $\lambda = 2$ och $a_0 = 1$ ser vi att

$$a_1 = -1, \qquad a_2 = \frac{1}{8}, \qquad a_3 = 0,$$

och därmed

$$a_4 = a_5 = \cdots = 0.$$

Alltså

$$y(x) = 1 - x + \frac{1}{8}x^2.$$

c) Skriv först ekvationen på normalform:

$$y'' + (\frac{1}{x} - \frac{1}{2})\, y' + \frac{\lambda}{2x}\, y = 0.$$

och multiplicera sedan med faktorn

$$e^{\int (\frac{1}{x} - \frac{1}{2}) dx} = e^{\ln x - \frac{x}{2}} = xe^{-\frac{x}{2}}.$$

Detta ger

$$xe^{-\frac{x}{2}}\, y'' + (1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}}\, y' + \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{x}{2}}\, y = 0,$$

eller

$$(xe^{-\frac{x}{2}}\, y')' + \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{x}{2}}\, y = 0,$$

som är på Sturm-Liouville-form med viktsfunktionen

$$w(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}.$$

(En annan konstant gånger $e^{-\frac{x}{2}}$ duger lika bra.)

d) Multiplikation av $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m y_m(x)$ med $y_n(x)w(x)$ och integration från 0 till ∞ ger med hjälp av ortogonalitetsrelationerna

$$A_n = \frac{\int_0^\infty f(x)y_n(x)w(x)\,dx}{\int_0^\infty |y_n(x)|^2 w(x)\,dx}.$$

4. Vi Laplacetransformerar i t-led, och sätter

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t)e^{-st}\,dt.$$

Differentialekvationen inklusive begynnelsevillkor blir

$$s^2 \cdot U(x,s) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{6}{s^2},$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 \cdot U(x,s) = -\frac{6}{s^2}.$$

Detta är en inhomogen linjär differentialtialekvation med konstanta koefficienter med x som oberoende variabel. Den "homogena lösningen" är $U_{hom} = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx}$, och en partikulär lösning är $U_{part} = 6/s^4$. Den fullständiga lösningen är därmed

$$U(x,s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{6}{s^4}.$$

Antagandet att $u(x,t)$ är begränsad då $x \to \infty$ leder till slutsatsen att $A(s) = 0$ för all s. Det återstående randvillkoret ger sedan $U(x,s) = 0$, varav $B(s) = -6/s^4$. Alltså har vi

$$U(x,s) = -\frac{6}{s^4} \cdot e^{-sx} + \frac{6}{s^4}.$$

Eftersom $\frac{6}{s^4} = \mathcal{L}(t^3)$ ger inverstransformering av ovanstående lösningen

$$u(x,t) = t^3 - (t-x)^3 H(t-x) = \begin{cases} t^3 & \text{då} \quad t < x, \\ t^3 - (t-x)^3 & \text{då} \quad t > x. \end{cases}$$

5. a) Ekvationen är av Eulertyp. Antingen gör man ansatsen $R(r) = r^\alpha$ (eller en motsvarande fullständig potensserieansats) eller så gör man substitutionen $r = e^t$. Man får indexrötter, eller karakteristiska rötter, $\alpha = n$ och $\alpha = -n-1$, och den allmänna lösningen blir

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Här måste $B = 0$ på grund av kravet då $r \to 0$.

b) Insättning av $Y = \Theta\Phi$ i ekvationen $\Lambda Y = \lambda Y$ ger (med $\lambda = -n(n+1)$)

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot\theta\,\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\Phi''}{\Phi^2} = -n(n+1).$$

Efter multiplikation med $\sin^2\theta$ inser man att Φ''/Φ måste vara konstant, och med tanke på att $\Phi(\varphi)$ ska vara 2π-periodisk så måste denna konstant vara på formen $-m^2$ för något heltal m; lösningarna för Φ blir då

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}$$

(eller, på reell form, $\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$; i det senare fallet räcker det att använda heltal $m \geq 0$, i den komplexa framställningen måste man använda både positiva och negativa heltal m). Man kan visa att endast värden på m i intervallet $-n \leq m \leq n$ är aktuella. Motivering för detta påstående får anses ligga utanför ramen för tentan.

Ekvationen för Θ blir nu

$$\Theta'' + \cot\theta\,\Theta' + [n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}]\,\Theta = 0.$$

c) Skriv $y(s) = \Theta(\theta)$ med $s = \cos\theta$. Med hjälp av kedjeregeln fås

$$\Theta' = -\sin\theta\, y',$$

$$\Theta'' = \sin^2\theta\, y'' - \cos\theta\, y' = (1-s^2)\, y'' - sy'.$$

Insättning i ekvationen för Θ ger

$$(1-s^2)\, y'' - 2sy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-s^2}]\, y = 0,$$

vilket är Legendres associerade differentialekvation. Lösningarna (de associerade Legendrefunktionerna) betecknas $y = P_n^m(s)$. Vi får därmed lösningarna till Θ-ekvationen:

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta)$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots,\ -n \leq m \leq n$.

d) Den allmänna lösningen till Laplaces ekvation blir alltså

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\, r^n\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$

Björn Gustafsson