Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2006-03-08, kl. 8.00-13.00.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3 samt 5B1301 Matematik f.k. för K

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–4 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman inklusive bonus, är 9 (betyg 3), 13 (betyg 4) och 17 (betyg 5).

---

1. Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för en svängande sträng av längd π.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{för} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad (t > 0),$$
$$u(x,0) = 5\sin 3x \qquad (0 < x < \pi),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\sin 4x \qquad (0 < x < \pi).$$

2. En oändligt lång stav har vid tid $t = 0$ temperaturfördelningen

$$u(x,0) = e^{-x^2} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

där x är koordinaten längs staven. Temperaturen $u = u(x,t)$ utvecklas i tiden enligt värmeledningsekvationen

$$4\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0).$$

Bestäm $u(x,t)$ genom att Fouriertransformera ekvationen i x-led.

3. Vi betraktar differentialekvationen

$$2xy'' + (2-x)y' + \lambda y = 0$$

på intervallet $0 < x < \infty$. Här är $y = y(x)$, och λ är en reell parameter.

a) Ansätt en lösning på formen

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

och normalisera denna så att $a_0 = 1$. Bestäm ett värde på r och bestäm en rekursionsformel för koefficienterna a_n så att differentialekvationen blir uppfylld.

b) I fallet $\lambda = 2$, bestäm alla koefficienterna a_n explicit och skriv upp lösningen $y(x)$.

c) Genom att multiplicera differentialekvationen med en lämplig faktor, skriv om den så att den blir på Sturm-Liouville-form:

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda w(x))y = 0.$$

Identifiera speciellt viktsfunktionen $w(x)$.

d) Antag nu att λ är ett heltal ≥ 0. Skriv $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, och låt $y = y_n(x)$ beteckna tillhörande lösning, erhållen i a). Då vet man att funktionsfamiljen $\{y_n(x) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ bildar ett fullständigt ortogonalsystem:

$$\int_0^\infty y_m(x)y_n(x)w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{om } m \neq n, \\ > 0 & \text{(men ändligt) om } m = n, \end{cases}$$

och varje funktion $f(x)$ som uppfyller

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 w(x)\,dx < \infty$$

kan utvecklas i en serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y_n(x).$$

Härled en formel (innehållande integraler med f, y_n och w) för bestämning av koefficienterna A_n.

4. Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ i området $x > 0$, $t > 0$ till följande problem (innehållande en inhomogen vågekvation):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6t \qquad (x > 0, t > 0),$$

$$u(0,t) = 0 \qquad (t > 0),$$

$$u(x,t) = \text{begränsad då } x \to \infty \qquad (t > 0),$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad (x > 0).$$

Ledning: Laplacetransformera i t-led.

5. Laplaces ekvation i sfäriska koordinater (r, θ, φ) är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda u = 0,$$

där

$$\Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Genom variabelseparationen

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

får man egenvärdesproblemen

$$r^2 R'' + 2rR' + \lambda R = 0 \qquad (0 < r < \infty),$$

$$\Lambda Y = \lambda Y$$

för R respektive Y, och där λ är en separationskonstant.

Man kan visa att villkoren att $Y(\theta, \varphi)$ måste ha ändliga gränsvärden då $\theta \to 0$, $\theta \to \pi$ och vara 2π-periodisk i φ bara tillåter värdena

$$\lambda = -n(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

på λ. Vi antar i fortsättningen att λ är på denna form.

a) Lös på valfritt sätt ekvationen för $R(r)$ med beaktande av att $R(r)$ måste ha ett ändligt gränsvärde då $r \to 0$.

b) Genomför variabelseparation mellan θ och φ, dvs. sök lösningar till $\Lambda Y = \lambda Y$ på formen

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

En ny separationskonstant uppträder. Bestäm de differentialekvationer som Θ och Φ ska uppfylla samt bestäm de tillåtna värdena på den nya separationskonstanten.

c) Visa att differentialekvationen för Θ via variabelsubstitutionen $s = \cos\theta$ kan identifieras med Legendres associerade differentialekvation (se BETA) och uttryck lösningarna Θ i associerade Legendrefunktioner.

d) Sammanfatta det hela genom att skriva upp den allmänna lösningen till Laplaces ekvation i sfäriska koordinater som en oändlig dubbelsumma innehållande de erhållna basfunktionerna.

LYCKA TILL!