

Lösningar till tentamensskrivning, 2006-06-02,
Korrigerad version (rättelser införda 15 januari 2007).
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3, och 5B1301
Matematik f.k. för K.

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen plus randvillkoren på produktform:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 4 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \quad (0 < x < 1),$$

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(1) = 0$ att λ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), $k = -n^2\pi^2$ och därmed

$$X(x) = B \sin n\pi x.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T : $T' + 4n^2\pi^2 T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-4n^2\pi^2 t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x, t) = B \sin n\pi x \cdot Ce^{-4n^2\pi^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t = 0$ ger

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x,$$

och jämför vi detta den givna begynnelsefunktionen får vi $C_3 = 2$, $C_5 = 4$, $C_7 = 6$, övriga $C_n = 0$. Detta ger svaret på uppgiften:

$$u(x, t) = 2e^{-4 \cdot 3^2 \pi^2 t} \sin 3\pi x + 4e^{-4 \cdot 5^2 \pi^2 t} \sin 5\pi x + 6e^{-4 \cdot 7^2 \pi^2 t} \sin 7\pi x.$$

2. Ansätt $u(r, t) = R(r)T(t)$ för differentialekvationen och randvärdena. Det ger

$$\frac{1}{c^2}RT'' = R''T + \frac{1}{r}R'T.$$

Division med RT ger att

$$\frac{1}{c^2} \frac{T(t)''}{T(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \text{konstant} = k.$$

För att få periodiska lösningar i t måste $k < 0$, så skriv $k = -\lambda^2$, $\lambda > 0$; ekvationen för T blir då $T'' + c^2\lambda^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t).$$

För R fås

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0.$$

Detta är Bessel differentialekvation av ordning noll på parametrisk form. Substitutionen $x = \lambda r$ ger ekvationen på standardform (vi skriver $y(x) = R(r)$)

$$xy'' + y' + xy = 0$$

med lösning $y(x) = C J_0(x) + D Y_0(x)$. Här måste $D = 0$ eftersom våra lösningar ska vara regulära i origo. Detta ger (med $C = 1$; det blir tillräckligt många konstanter senare),

$$R(r) = J_0(\lambda r).$$

Randvillkoret $u(a, t) = 0$ ger sedan att λa måste vara ett nollställe till J_0 . Alltså

$$\lambda = \frac{\alpha_n}{a},$$

och därmed

$$R(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right).$$

Superposition ger den allmänna lösningen (alltså svaret på a))

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right) (A_n \cos\left(\frac{c\alpha_n t}{a}\right) + B_n \sin\left(\frac{c\alpha_n t}{a}\right)).$$

För $t = 0$ fås

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\alpha_n c}{a} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{a}\right)$$

och jämförelse med givna data, i fallet $a = 2$, $c = 2$, ger att $A_3 = 5$, $B_7 = 4$ och övriga koefficienter lika med noll. Svaret till b) blir därmed

$$u(r, t) = 5 J_0\left(\frac{\alpha_3 r}{2}\right) \cos(\alpha_3 t) + 4 J_0\left(\frac{\alpha_7 r}{2}\right) \sin(\alpha_7 t).$$

3. Ansätt

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Det ger

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n,$$

och vänsterledet i differentialekvationen blir

$$\begin{aligned} (4-x^2)y'' - 2xy' + 2y &= \sum_{n=0}^{\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) + 2n - 2)a_n]x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+2)(n-1)a_n]x^n. \end{aligned}$$

Detta = 0 (identiskt i x) om och endast om

$$4(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n+2)(n-1)a_n$$

för alla $n = 0, 1, 2, \dots$, dvs.

$$a_{n+2} = \frac{n-1}{4(n+1)} a_n.$$

Här har vi nu att $a_0 = y(0) = 12$, $a_1 = y'(0) = 5$ och får sedan $a_2 = -3$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{1}{4}$ osv.

Man inser att alla a_n med $n \geq 3$ udda blir = 0 (eftersom $a_3 = 0$), och för jämna n fås

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{n-1}{4(n+1)} a_n = \frac{n-1}{4(n+1)} \frac{n-3}{4(n-1)} a_{n-2} = \dots \\ \dots &= \frac{n-1}{4(n+1)} \frac{n-3}{4(n-1)} \frac{n-5}{4(n-3)} \dots \frac{1}{4 \cdot 3} \frac{-1}{4 \cdot 1} a_0 = \frac{-1}{(n+1)2^{n+2}} a_0. \end{aligned}$$

Med $n = 2m$ kan vi skriva, sammanfattningsvis,

$$y = 5x - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{12x^{2m}}{(2m-1)2^{2m}} = 12 + 5x - 3x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \dots$$

4. För a) hänvisas till läroboken. Med

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx$$

blir ekvationen

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} + 2i\omega \hat{u}(\omega, t) = 0,$$

en ordinär differentialekvation (linjär med konstanta koefficienter) i t för varje fixt ω . Lösningen till denna är

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega)e^{-2i\omega t}.$$

Insättning av $t = 0$ ger att $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$, där $f(x) = e^{-x^2}$.

Om man nu använder a)-delen av uppgiften med $a = 2$ så får man omedelbart att

$$u(x, t) = f(x - 2) = e^{-(x-2t)^2},$$

vilket alltså är svaret på uppgiften. (Det kontrolleras lätt genom derivering.)

5. a) Subtraherar man $1/2$ från f får man en udda funktion ($\frac{1}{2}\text{sign}$). Med hjälp av BETA fås sedan

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \sin n\pi \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin n\pi. \end{aligned}$$

b) Denna del är ganska lik motsvarande del av uppgifterna 1 och 2: ansatsen $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ger

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0,$$

varav

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{konstant} = k.$$

Funktionen Φ måste vara 2π -periodisk, vilket den endast kan bli (jfr. uppg. 1) med $k = 0$ (konstantlösningen) samt $k = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) (hela lösningen). Detta ger $\Phi(\varphi) = a_0$, för $k = 0$, samt

$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

För R har vi nu ekvationen

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0,$$

som är av Eulertyp. Ansatsen $R = r^\alpha$ (eller en motsvarande fullständig potensserieansats) eller substitutionen $r = e^t$ ger allmänna lösningen

$$R = Ar^n + Br^{-n}.$$

Här måste $B = 0$ (jfr. uppg. 2). Tillsammans med φ -delen och superposition får vi därmed allmänna lösningen

$$u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

c) Sätter vi in $r = 1$ ovan så får vi en helt vanlig 2π -periodisk Fourierserie. Jämför vi denna med f :s Fourierseria i a) så får vi värdena på koefficienterna och därmed den slutliga lösningen:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} r^n \sin n\pi$$

Björn Gustafsson