Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2006-06-02, kl. 8.00-13.00.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3 samt 5B1301 Matematik f.k. för K

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–4 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman inklusive bonus, är 9 (betyg 3), 13 (betyg 4) och 17 (betyg 5).

---

1. Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för värmeledningsekvationen i en rumsdimension:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{för} \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le t < \infty,$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (0 \le t < \infty),$$

$$u(x,0) = 2\sin 3\pi x + 4\sin 5\pi x + 6\sin 7\pi x \quad (0 \le x \le 1).$$

2. Vågekvationen för ett cirkulärt membran med radie a ges i polära koordinater (r,φ) av

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \qquad (r \le a, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t \ge 0),$$

där $u = u(r,\varphi,t)$ anger utbuktningen av membranet. Vi antar att detta är fastspänt längs $r = a$ på nivån $u = 0$, vilket ger randvillkoret

$$u(a,\varphi,t) = 0 \quad (0 \le \varphi < 2\pi, \quad t \ge 0).$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till ovanstående problem under antagande av cirkulär symmetri, dvs. att u i själva verket inte beror på φ. (Vi skriver i forsättningen $u = u(r,t)$). Genomför variabelseparation osv. även om en färdig formel skulle finnas i BETA. Man får använda att separationskonstanten har sådant tecken att lösningen blir periodisk i t.

b) Bestäm den specifika lösning som fås med $a = 2$, $c = 2$ och de φ-oberoende begynnelsevillkoren

$$u(r,0) = 5J_0\left(\frac{\alpha_3 r}{2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = 4\alpha_7 J_0\left(\frac{\alpha_7 r}{2}\right).$$

Här är J_0 nollte ordningens Besselfunktion och α_n $(n = 1,2,3,\dots)$ dess nollställen $(0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots)$.

3. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$(4-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

$$y(0) = 12,$$

$$y'(0) = 5$$

för $y = y(x)$ genom att göra en potensserieansats kring $x = 0$. Ge svaret i form av en potensserie med åtminstone de fyra första termerna skilda från noll medtagna. Om möjligt, härled också en formel för den allmänna koefficienten.

4. a) Bevisa att om två funktioner, f och g, är relaterade genom $g(x) = f(x-a)$, där a är ett reellt tal, så är deras Fouriertransformer ($\hat{f}$ och $\hat{g}$) relaterade genom

$$\hat{g}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega).$$

b) Bestäm en lösning $u = u(x,t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{för} -\infty < x < \infty,\ 0 \le t < \infty,$$

$$u(x,0) = e^{-x^2} \quad (-\infty < x < \infty),$$

genom att Fouriertransformera i x-led.

5. a) Låt den 2π-periodiska funktionen $f(\varphi)$ vara definierad av att

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{för } -\pi < \varphi \le 0, \\ 1 & \text{för } 0 < \varphi \le \pi. \end{cases}$$

Bestäm koefficienterna i f:s Fourierserie

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

b) Laplaceoperatorn i polära koordinater (r,φ) ges av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

där $u = u(r,\varphi)$. Bestäm (med hjälp av variabelseparation osv.) den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i cirkelskivan $r \le 1$.

c) Lös Dirichletproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i cirkelskivan} \quad r \le 1, \\ u(1,\varphi) = f(\varphi), \end{cases}$$

med f som i a).

LYCKA TILL!