Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2007-03-12, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3, och 5B1301 Matematik f.k. för K.

---

1. Med $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ fås

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Vänsterledet i differentialekvationen blir därmed

$$y'' - 2xy' + 8y = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 8a_n] x^n,$$

som $= 0$ om och endast om alla koefficienter $= 0$. Detta ger rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \frac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Här kan a_0, a_1 väljas fritt, och i övrigt fås

$$a_2 = -4a_0,$$

$$a_3 = -a_1,$$

$$a_4 = -\frac{1}{3} a_2 = \frac{4}{3} a_0,$$

$$a_5 = -\frac{1}{10} a_3 = \frac{1}{10} a_1,$$

$$a_6 = 0$$

osv. Det följer att $a_n = 0$ för alla jämna $n \geq 6$ och den allmänna lösningen, framställd som linjärkombination av två linjärt oberoende lösningar, blir

$$y = a_0(1 - 4x^2 - \frac{4}{3} x^4) + a_1(x - x^3 + \frac{1}{10} x^5 + \dots).$$

2. Ansätt först $u(x,y) = X(x)Y(y)$ för differentialekvationen och randvillkoren i x-led. Det ger

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{konstant} = k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = -n^2$ och $X(x) = B\sin nx$.

Ekvationen för Y blir nu

$$Y'' - n^2 Y = 0$$

med lösningar

$$Y(y) = a_n e^{ny} + b_n e^{-ny}.$$

Vi fick alltså produktlösningarna $u(x,y) = (a_n e^{ny} + b_n e^{-ny})\sin nx$ (konstanten B har bakats in i a_n och b_n), som kan superponeras till

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n e^{ny} + b_n e^{-ny})\sin nx, \tag{1}$$

som är den allmänna lösningen till diffenrentialekvationen inklusive randvillkor i x-led.

Randvillkoren i y-led ger efter insättning $y = 0$ resp. $y = \pi$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)\sin nx = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi})\sin nx = 4(e^{5\pi} - e^{-5\pi})\sin 5x.$$

Ovanstående ekvationer är likheter mellan sinusserier på intervallet $0 < x < \pi$, och eftersom två sinusserier definierar samma funktion om och endast om de har samma koefficienter så fås

$$a_n + b_n = 0,$$

$$a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = \begin{cases} 4(e^{5\pi} - e^{-5\pi}) & \text{om} \quad n = 5, \\ 0 \quad \text{om} \quad n \neq 5. \end{cases}$$

Det följer att $a_5 = 4, b_5 = -4$, övriga a_n, b_n lika med noll. Insättning av detta i den allmänna lösningen (1) ovan ger svaret på uppgiften:

$$u(x,y) = 4(e^{5y} - e^{-5y})\sin 5x.$$

3. Variabelseparation $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ för PDE + RV ger

$$\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} = \text{konstant} = k,$$

varav

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k\rho^2 R = 0,$$
$$T' - kT = 0.$$

Den senare ekvationen har allmän lösning $T(t) = Ce^{kt}$. Det är nödvändigt att $k \leq 0$ för att $u(\rho, t)$ inte ska innehålla exponentiellt växande termer.

Skriv alltså $k = -a^2$, $a \geq 0$. Då har vi en Besselekvation av ordning noll för R:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + a^2\rho^2 R = 0,$$

med allmän lösning

$$R(\rho) = AJ_0(a\rho) + BY_0(a\rho).$$

Eftersom Y_0 har en singularitet i origo, medan R ska vara regulär där, så måste $B = 0$. Att $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ ska uppfylla $u(1, t) = 0$ ger sedan att $J_0(a) = 0$, dvs att a är ett av nollställena α_n. Därmed har vi

$$k = -\alpha_n^2, \quad R(\rho) = AJ_0(\alpha_n\rho), T(t) = Ce^{-\alpha_n^2 t}$$

för något $n = 1, 2, \ldots$. Efter superposition av de härigenom uppkomna variabelseparerade lösningarna får vi den allmänna lösningen till PDE + RV:

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t} J_0(\alpha_n\rho).$$

Anpassning till BV ger $A_2 = 4$, $A_3 = 1$, övriga $A_n = 0$ och därigenom svaret

$$u(\rho, t) = 4e^{-\alpha_2^2 t} J_0(\alpha_2\rho) + e^{-\alpha_3^2 t} J_0(\alpha_3\rho).$$

4. a) Derivering av ekvationen (1), dels med avseende på t, dels med avseende på x, ger

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Eliminering av den blandade derivatan ger här vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Slutsatsen är att varje två gånger kontinuerligt deriverbar lösning u till (1) också är en lösning till vågekvationen.

b) Låt

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{-i\omega x}dx$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x. Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = 5i\omega\hat{u}(\omega, t),$$

en ordinär differentialekvation i t som har lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = Ae^{5i\omega t}.$$

Insättning av $t = 0$ ger att integrationskonstanten blir

$$A = \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Vi har nu att

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{5i\omega t}\hat{f}(\omega),$$

som med hjälp av en förskjutningsformel för Fouriertransformen (se BETA) ger

$$u(x, t) = f(x + 5t).$$

I det "explicita fallet" får vi

$$u(x, t) = e^{-(x+5t)^2}.$$

Detta u är konstant längs linjer $x + 5t =$ konstant i (x, t)-planet. Betraktar vi x som funktion av t längs en sådan linje så har vi $x(t) = -5t +$ konstant, vilket betyder att allting förflyttar sig med hastighet -5 i x-led (alltså hastighet 5 i negativa x-axelns riktning).

c) För värmeledningsekavtionen ger Fouriertransformering

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t),$$

med lösning

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}\hat{u}(\omega, 0).$$

Med hjälp av BETA och givet begynnelsevärde fås

$$\hat{u}(\omega, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}},$$

varav

$$\hat{u}(\omega, t) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2 t - \frac{\omega^2}{4}} = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2 (t + \frac{1}{4})}.$$

Inverstransformering ger nu

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Denna lösning existerar så länge $1 + 4t > 0$, dvs. för $t > t_0 = -\frac{1}{4}$. Då $t \to -\frac{1}{4}$ konvergerar $u(x, t)$ mot ett Diracmått i punkten $x = 0$, närmare bestämt,

$$u(x, t) \to \sqrt{\pi}\delta(x) \quad \text{d} \quad t \to -\frac{1}{4}.$$

Konstanten $\sqrt{\pi}$ kommer från att en uträkning visar att

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \sqrt{\pi}$$

för alla t.

5. a) Laplacetransformering av ekvationen ger

$$-\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + sY(s) - y(0) - \frac{d}{ds}(Y(s)) = 0,$$

$$(1+s^2)\frac{dY(s)}{ds} + sY(s) = 0.$$

b) Detta är en första ordningens linjär ekvation (är även separabel) som löses med standardteknik: efter multiplikation med lämplig faktor blir den exakt, närmare bestämt

$$\frac{d}{ds}(\sqrt{1+s^2}Y(s)) = 0.$$

Alltså

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Detta ger

$$\lim_{s\to+\infty} sY(s) = C.$$

Enligt omnämnd gränsvärdessats blir därmed $C = y(0) = 1$. Alltså:

$$Y(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Notera att $Y(s)$, och därmed $y(t)$, blev entydigt bestämd trots att vi bara hade ett begynnelsevillkor. Detta har att göra med att punkten $t = 0$ är singulär för ekvationen. Eftersom J_0 löser samma ekvation (med begynnelsevärde) som y så följer det att $y = J_0$.

c) Vi ser att

$$Y(s)\cdot Y(s) = \frac{1}{1+s^2},$$

som ju är Laplacetransformen för $\sin t$. Alltså ger faltningssatsen $y * y = \sin$, vilket skulle bevisas.

Björn Gustafsson