Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2007-03-12, kl. 9.00-14.00.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3 samt 5B1301 Matematik f.k. för K

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–4 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman inklusive bonus, är 9 (betyg 3), 13 (betyg 4) och 17 (betyg 5).

---

1. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen

$$y'' - 2xy' + 8y = 0$$

genom att göra potensserieansats $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Det räcker att ta med de tre första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

2. Bestäm lösningen $u = u(x, y)$ till följande randvärdesproblem för Laplaces ekvation i en kvadrat.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{för} \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

$$\begin{cases} u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & (0 < y < \pi), \\ u(x, 0) = 0 & (0 < x < \pi), \\ u(x, \pi) = 4(e^{5\pi} - e^{-5\pi}) \sin 5x & (0 < x < \pi). \end{cases}$$

3. Uppgiften går ut på att lösa värmeledningsekvationen i en oändlig cylinder med temperatur noll på mantelytan och given initialtemperatur i cylindern. Vi använder cylinderkoordinater (ρ, φ, z) och gör antaganden sådana att temperaturen u i själva verket bara beror på ρ och tiden t: $u = u(\rho, t)$. Problemet är då

$$\text{PDE}: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (0 < \rho < 1, 0 \leq t < \infty)$$

$$\text{RV}: \quad u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty),$$

$$\text{BV}: \quad u(\rho, 0) = f(\rho) \quad (0 < \rho < 1),$$

där

$$f(\rho) = 4J_0(\alpha_2 \rho) + J_0(\alpha_3 \rho)$$

och $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \dots$ är nollställena till den nollte Besselfunktionen J_0. I randvillkoren ingår också att $\lim_{\rho \to 0} u(\rho, t)$ existerar och är ändligt.

Bestäm lösningen $u = u(\rho, t)$ till ovanstående problem med hjälp av variabelseparation osv. Separationskonstanten har sådant tecken att att lösningen inte innehåller termer som växer exponentiellt då $t \to +\infty$.

4. Den här uppgiften går ut på att jämföra beteendet hos lösningar till vågekvationen med de för värmeledningsekvationen. Vi arbetar med funktioner $u(x,t)$ definierade på hela reella axeln ($-\infty < x < \infty$) och där även tiden t kan få bli negativ i vissa fall.

   a) Visa att om $u(x,t)$ löser differentialekavationen (av första ordningen)
   $$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1}$$
   så löser u också vågekvationen
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
   (Den första ekvationen kan sägas vara en halv vågekvation, som beskriver vågutbredning i enbart ena riktningen.)

   b) Lös den första ekvationen, (1), för $t > 0$ med allmänt begynnelsevillkor
   $$u(x,0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$
   genom att Fouriertransformera i x-led och använda allmänna egenskaper hos Fouriertransformen. Lösningen kommer förstås att innehålla den ännu ej preciserade funktionen f. Skriv upp lösningen explicit i fallet
   $$f(x) = e^{-x^2}.$$
   Visa att den erhållna lösningen existerar och löser (1) även för negativa t-värden och att den faktiskt beskriver en 'våg' som utbreder sig med en viss hastighet (vilken?) och riktning (vilken?) längs x-axeln utan att ändra form.

   c) Lös nu istället värmeledningsekvationen med samma begynnelsevillkor:
   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0), \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$
   Lösningen existerar även här bakåt i tiden, men bara till en viss gräns: det finns en tid $t_0 < 0$ sådan att lösningen existerar för alla $t > t_0$ men utvecklar en singularitet då $t \to t_0$. Bestäm t_0 och beskriv vilken typ av singularitet det är fråga om.

5. Låt $y(t)$ vara en lösning till
   $$\begin{cases} ty'' + y' + ty = 0 \quad (t > 0), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   och låt $Y(s)$ beteckna Laplacetransformen till $y(t)$.

   a) Bestäm en 1:a ordningens differentialekvation för $Y(s)$ genom att Laplacetransformera differentialekvationen för y.

   b) Lös den i b) erhållna differentialekvationen för $Y(s)$. Man behöver använda gränsvärdessatsen $\lim_{s\to+\infty} sY(s) = y(0)$ för att bestämma integrationskonstanten.

   c) Differentialekvationen för y är som bekant Bessels differentialekvation av ordning noll. Det följer att $y = J_0$, den nollte Besselfunktionen av första slaget. Använd resultatet av b) för att visa att
   $$J_0 * J_0 = \sin,$$
   där $*$ betyder faltning på intervallet $[0,\infty)$.

LYCKA TILL!