Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2007-05-31, 5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3, och 5B1301 Matematik f.k. för K.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen och randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = -n^2$ och $X(x) = B\sin nx$.

Ekvationen för T blir nu $T'' + 4n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = a\cos 2nt + b\sin 2nt.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin nx(a\cos 2nt + b\sin 2nt), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx(a_n\cos 2nt + b_n\sin 2nt).$$

Nu ska begynnelsevillkoren satisfieras. Vi har

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx,$$

så jämförelse med de givna begynnelsevillkoren ger direkt att

$$a_3 = 5, \qquad a_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 3,$$

$$2 \cdot 4 \cdot b_4 = 8, \qquad 2nb_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 4$$

Vi får därmed svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = 5 \sin 3x \cos 6t + \sin 4x \sin 8t.$$

2. a) Vi söker först produktlösningar $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ till differentialekvationen, som blir

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Den sista termen beror bara på φ, de två första bara på r. Det följer att dessa delar måste vara konstanta var för sig. Φ måste dessutom vara 2π-periodisk, vilket gör att konstanten för Φ-delen måste vara på formen $-n^2$, $n \geq 0$ heltal. Ekvationen för Φ blir då

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0,$$

med lösningar

$$\Phi(\varphi) = a\varphi + b \qquad (n = 0),$$

$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \qquad (n \geq 1).$$

I första fallet måste $a = 0$ för att Φ ska vara periodisk.
För R får vi ekvationen

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

Detta är en Eulerekvation. Ansatsen $R = r^\lambda$ ger indexekvationen $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm n$. Detta ger

$$R = A + B \ln r \qquad (n = 0),$$

$$R = Ar^n + Br^{-n} \qquad (n \geq 1).$$

I båda fallen måste $B = 0$ för att R (och därmed u) inte ska få en singularitet i origo. Superponerar vi nu alla produktlösningar $R(r)\Phi(\varphi)$ som erhållits ovan så får vi efter omdöpning av konstanterna den allmänna lösningen till Laplaces ekvation på formen:

$$u(r,\varphi) = A + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

b) Ovanstående ska anpassas till randvillkoret. Vi har

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Med $r = 1$ ser vi att a_n, b_n ska väljas så att

$$\sum_{n=1}^{\infty} (na_n \cos n\varphi + nb_n \sin n\varphi) = 2\cos^2 3\varphi - 2\sin^2 \varphi.$$

Med hjälp av BETA (formler för $\cos^2$ osv.) finner man att högerledet är lika med

$$1 + \cos 6\varphi - (1 - \cos 2\varphi) = \cos 6\varphi + \cos 2\varphi.$$

Det följer genom identifikation att

$$a_6 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

och att övriga koefficienter $= 0$ (utom A). (Alternativt kan man bestämma a_n och b_n med hjälp av de vanliga integralformlerna för Fourierkoefficienter.) Konstanten A försvann ur räkningarna och är därmed fri. Sammanfattningsvis fann vi lösningarna

$$u(r, \varphi) = A + \frac{1}{2}r^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{6}r^6 \cos 6\varphi,$$

A godtycklig konstant.

3. Med

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

fås

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Detta ger att vänsterledet i ekvationen blir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} 5a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r+1}$$

$$= \{\text{döp om index så att bara potenser} \quad x^{n+r} \quad \text{förekommer, och sortera termer}\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[((n+r)(n+r-1) - 5(n+r) + 5))a_n + (-(n-1+r)+3)a_{n-1}]x^{n+r} + (r(r-1) - 5r + 5)a_0 x^r$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[((n+r)^2 - 6(n+r) + 5)a_n - (n+r-4)a_{n-1}]x^{n+r} + (r^2 - 6r + 5)a_0 x^r.$$

Detta ska vara identiskt lika med noll, vilket kräver att alla koefficienter är lika med noll. För x^r fås, eftersom $a_0 \neq 0$, “indexekvationen”

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

med rötterna

$$r = \begin{cases} 5 \\ 1. \end{cases}$$

Börja med $r = 5$ (den största roten). Efter förenkling blir potensserien ovan

$$= \sum_{n=1}^{\infty}[n(n+4)a_n - (n+1)a_{n-1}]x^{n+5},$$

vilket ger rekursionsrelationen

$$a_n = \frac{n+1}{n(n+4)} a_{n-1}$$

för $n = 1, 2, \ldots$. Väljer vi $a_0 = 1$ får vi $a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{1}{10}$, $a_3 = \frac{2}{105}$, ..., dvs lösningen

$$y_1(x) = x^5(1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{105}x^3 + \ldots).$$

Den andra indexroten $r = 1$ ger på samma sätt

$$a_n = \frac{n-3}{n(n-4)} a_{n-1},$$

och med $a_0 = 1$ fås $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$ och därmed $a_n = 0$ för alla $n \geq 3$. Detta ger polynomlösningen

$$y_2(x) = x(1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2).$$

4. Låt

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x (Vi använder BETA:s definition av Fouriertransformen). Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$i\omega \frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = 2(i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Denna ordinära differentialekvation i t har den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega) e^{2i\omega t}.$$

För $t = 0$ fås $\hat{u}(\omega, 0) = A(\omega)$, dvs $A(\omega)$ ska vara Fouriertransformen till den givna initialfunktionen. Detta ger (tabell)

$$A(\omega) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{4^2 + \omega^2}.$$

Alltså

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{24 e^{2i\omega t}}{16 + \omega^2}.$$

För återtransformeringen använder man den allmänna egenskapen hos Fouriertransformen att en faktor $e^{2i\omega t}$ på transformsidan svarar mot en förskjutning $x \mapsto x + 2t$ på ursprungssidan (observera att t i detta läge är en konstant; vi transformerar/återtransformerar med anseende på variabeln x). Det följer att vi efter återtransformering får lösningen

$$u(x,t) = 3e^{-4|x+2t|}.$$

(Med $u(x, 0) = f(x)$ hade man fått $u(x,t) = f(x + 2t)$, och $\hat{f}(\omega)$ behöver egentligen aldrig beräknas.)

Skisser av lösningen finns, för ett liknande problem, i läroboken sid 415. Man ser en “våg”, som rör sig utan att ändra form åt vänster. Detta tyder på att vår ekvation är besläktad med vågekvationen. Detta kan också bekräftas genom att man konstaterar att ekvationen är på formen $au_{xx} + 2bu_{xt} + cu_{tt} = 0$ med koefficienter $a = 2, b = -\frac{1}{2}, c = 0$, vilket gör att den, liksom vågekvationen, faller under kategorin "hyperbolisk"ekvation (se BETA, t.ex.).

5. a) Med hjälp av differentialekvationen och partiell integration fås

$$\lambda_m \int_1^4 y_m(x)y_n(x)e^x dx = -\int_1^4 ((1+x^2)y_m')'y_n(x)dx$$

$$= -[(1+x^2)y_m'y_n(x)]_1^4 + \int_1^4 (1+x^2)y_m'y_n'(x)dx$$

$$= \int_1^4 (1+x^2)y_m'y_n'(x)dx$$

$$= \{\text{på samma sätt}\} = \lambda_n \int_1^4 y_m(x)y_n(x)e^x dx.$$

Subtraktion mellan ytterleden ger nu att

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_1^4 y_m(x)y_n(x)e^x dx = 0.$$

Alltså följer att

$$\int_1^4 y_m(x)y_n(x)e^x dx = 0$$

om $\lambda_m \neq \lambda_n$, vilket skulle bevisas.

b) Om vi inför beteckningen

$$(f, g) = \int_1^4 f(x)g(x)e^x dx$$

för skalärprodukten (inre produkten) mellan två funktioner f och g så ger

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x)$$

och ortogonaliteten hos $\{y_n(x)\}$ att

$$(f, y_m) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y_n, y_m) = A_m(y_m, y_m),$$

dvs (med omdöpning av index)

$$A_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)}.$$

Björn Gustafsson