Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2007-05-31, kl. 8.00-13.00.
5B1215 Matematiska metoder för ME, del 3 samt 5B1301 Matematik f.k. för K

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA.
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–4 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman inklusive bonus, är 9 (betyg 3), 13 (betyg 4) och 17 (betyg 5).

---

1. Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för en svängande sträng av längd π.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{för} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad (t > 0),$$
$$u(x,0) = 5\sin 3x \qquad (0 < x < \pi),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 8\sin 4x \qquad (0 < x < \pi).$$

2. a) Laplaceoperatorn i polära koordinater (r,φ) ges av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

där $u = u(r,\varphi)$. Bestäm (med hjälp av variableseparation osv.) den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i cirkelskivan $0 \le r < 1$.

b) Bestäm alla lösningar till randvärdesproblemet (av "Neumanntyp")

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{i cirkelskivan} \quad 0 \le r < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1,\varphi) = 2\cos^2 3\varphi - 2\sin^2\varphi. \end{cases}$$

3. Bestäm med hjälp av potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

där $a_0, a_1, a_2, \ldots$ obestämda koefficienter ($a_0 \neq 0$) och r ett obestämt tal, två linjärt oberoende lösningar till ekvationen

$$x^2 y'' - (5x + x^2)y' + (5 + 3x)y = 0.$$

Den ena lösningen ska bli ett polynom och för den andra räcker det att ta med de fyra första termerna skilda från noll.

4. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{för} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 3e^{-4|x|} & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

för $u = u(x,t)$ genom att Fouriertransformera med avseende på x.

Skissera sedan för några olika t-värden (t.ex. $t = -1, 0, 1, 2$) lösningens $u(x,t)$ utseende som funktion av x. På grundval av resultatet, vilken ekvation skulle du säga att vår differentialekvation är mest besläktad med: vågekvationen, värmeledningsekvationen eller Laplaces ekvation?

5. Betrakta det reguljära Sturm-Liouville-problemet på intervallet $1 < x < 4$,

$$\begin{cases} ((1+x^2)y'(x))' + \lambda e^x y(x) = 0 \quad (1 < x < 4), \\ y(1) = y(4) = 0. \end{cases}$$

Som bekant finns det lösningar (utöver den triviala lösningen $y = 0$) endast för vissa värden på λ, oändligt många: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$. Låt y_n vara en icke-trivial lösning (egenfunktion) hörande till λ_n (egenvärdet).

a) Visa att y_m och y_n är ortogonala med avseende på viktsfunktionen e^x då $m \neq n$:

$$\int_1^4 y_m(x) y_n(x) e^x dx = 0 \quad (m \neq n).$$

Ledning: Man kan börja exempelvis med att omforma uttrycket $\lambda_m \int_1^4 y_m(x) y_n(x) e^x dx$ med hjälp av differentialekvationen.

b) Det följer från den allmänna teorin att $\{y_n\}$ bildar ett *fullständigt* ortogonalsystem på intervallet $1 < x < 4$, dvs att varje funktion f sådan att $\int_1^4 |f(x)|^2 e^x dx < \infty$ kan utvecklas i en serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x).$$

Härled en formel för koefficienterna A_n i denna utveckling.

Anm: a) och b) kan lösas oberoende av varandra.

LYCKA TILL!