Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2008–03–11

1) Lösning

Frobeniusansatsen $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ insatt i differentialekvationen ger

$$
\begin{aligned}
9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = &\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} \\
&+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 9(n+r)a_n x^{n+r+1}}_{n+1\to n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Omindiceringen ger oss

$$
\sum_{n=0}^{\infty} [9(n+r)(n+r-1)+2]a_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} 9(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r} = 0 \tag{2}
$$

Här ser vi att indexekvationen ($n = 0$) blir

$$
9r^2 - 9r + 2 = (3r-1)(3r-2) = 0 \Longrightarrow r_1 = \frac{2}{3} \text{ och } r_2 = \frac{1}{3} \tag{3}
$$

För $r_1 = \frac{2}{3}$ får vi rekursionsformeln

$$
a_n = -\frac{3n-1}{n(3n+1)}\, a_{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{4}
$$

varur följer

$$
a_1 = -\frac{1}{2}\, a_0, \quad a_2 = \frac{5}{28}\, a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{21}\, a_0, \tag{5}
$$

och för $r_1 = \frac{1}{3}$ får vi rekursionsformeln

$$
a_n = -\frac{3n-2}{n(3n-1)}\, a_{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{6}
$$

som ger

$$
a_1 = -\frac{1}{2}\, a_0, \quad a_2 = \frac{1}{5}\, a_0, \quad a_3 = -\frac{7}{120}\, a_0, \tag{7}
$$

Detta resulterar i den allmänna lösningen

$$
\boxed{y = Ax^{2/3}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{28}x^2 - \frac{1}{21}x^3 + ...\right) + Bx^{1/3}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{120}x^3 + ...\right)}
$$

2) Lösning

$u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$ ger randvärdesproblemet för $v(x,t)$

$$\begin{aligned}
\texttt{PDE:}\, v_t(x,t) &= kv_{xx}(x,t) && (8)\\
\texttt{RV1:}\, v(0,t) &= \texttt{RV2:}\, v(2,t) = 0 && (9)\\
\texttt{BV1:}\, v(x,0) &= \left(1 + 4\cos\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} && (10)
\end{aligned}$$

Variabelseparation $v(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda \tag{11}$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville -) problemet

$$\begin{aligned}
X'' - \lambda X &= 0, \quad 0 < x < 2 && (12)\\
X(0) &= X(2) = 0 && (13)
\end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till ekv(12) är

$$X(x) = \begin{cases} C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\\ C_1 + C_2 x & \text{om } \lambda = 0\\ C_1\cosh\alpha x + C_2\sinh\alpha x, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{14}$$

Det första randvillkoret $X(0) = 0$ ger $C_1 = 0$ och C_2 kan väljas godtyckligt. Det andra randvillkoret ger vid handen

$$X(2) = 0 = \begin{cases} C_2\sin\alpha 2 & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\\ C_2 2 & \text{om } \lambda = 0\\ C_2\sinh\alpha 2, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{15}$$

som endast ger en icke trivial lösning $X \neq 0$ för negativa $\lambda = -\alpha^2$, m a o måste $\sin 2\alpha = 0$ eller $2\alpha = n\pi$. Den motsvarande egenfunktionen blir då $\underline{X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}}$

För T har vi ekvationen, se ekv(11),

$$\frac{1}{k}\frac{T'}{T} = -\alpha^2 \tag{16}$$

med lösningen

$$T_n(t) = e^{-kn^2\pi^2 t/4} \tag{17}$$

Härmed får vi den allmänna lösningen

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-kn^2\pi^2 t/4}\sin\frac{n\pi x}{2} \tag{18}$$

och $t = 0$ ger

$$v(x,0) = \left(1 + 4\cos\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{2} \tag{19}$$

där mellanledet i sambanden (19) kan omformas och resulterar i

$$\sin\frac{3\pi x}{2} + 2\sin\frac{6\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{2} \tag{20}$$

Identifiering ger $c_3 = 1, c_6 = 2$ och $c_n = 0$ för $n \neq 3$ resp 6 och svaret blir slutligen

$$\boxed{u(x,t) = \sin\frac{3\pi x}{2} e^{-(9k\pi^2/4+h)t} + 2\sin\frac{6\pi x}{2} e^{-(9k\pi^2+h)t}}$$

---

3) Lösning

Variabelseparation $u(x,y) = X(x)Y(y)$ ger

$$u = XY \Longrightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \tag{21}$$

och sambanden

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0 \tag{22}$$
$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad Y'(0) = Y'(1) = 0 \tag{23}$$

ger den allmänna lösningen i tabellform

$$Y(y) = \begin{cases} C_1\cos\alpha y + C_2\sin\alpha y & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 y + C_2 & \text{om } \lambda = 0 \\ C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y}, & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{24}$$

samt tabellen för derivatan

$$Y'(y) = \begin{cases} \alpha(-C_1\sin\alpha y + C_2\cos\alpha y) & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 e^{\alpha y} - C_2 e^{-\alpha y}), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{25}$$

Med insatta randvärden fås

$$Y'(0) = 0 = \begin{cases} \alpha C_2 & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 - C_2), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{26}$$

$$Y'(1) = 0 = \begin{cases} \alpha(-C_1\sin\alpha + C_2\cos\alpha) & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0 \\ C_1 & \text{om } \lambda = 0 \\ \alpha(C_1 e^{\alpha} - C_2 e^{-\alpha}), & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0 \end{cases} \tag{27}$$

Ur tabellen ser vi att för $\lambda > 0$ blir $C_1 = C_2 = 0$, däremot gäller för $\lambda = 0$ att $C_1 = 0$ och $Y(y) = C_2$ godtyckligt, vilket innebär att $\lambda = 0$ ger egenvärdet 0 med motsvarande $\underline{\text{egenfunktion } Y_0(y) = C_2 \neq 0}$ och för $\lambda < 0, C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$ krävs $\sin\alpha = 0, \Longrightarrow \alpha = n\pi, \quad n = 1, 2, ...$
Den motsvarande egenfunktion blir då

$$\underline{Y_n(y) = \cos n\pi y,} \quad n = 1, 2, ...$$

Från ekv(22) får vi nu

$$X'' - n^2\pi^2 X = 0, \quad X(0) = 0 \tag{28}$$

som resulterar i

$$X(x) = C_1 e^{n\pi x} + C_2 e^{-n\pi x}, \quad C_2 = -C_1$$

och vi får egenfunktionen

$$\underline{X_n(x) = \sinh n\pi x,} \quad n = 1, 2, ...$$

Observera att vi fick ovan ett egenvärde $\lambda = 0$, m a o $n = 0$, som innebär att vi har en lösning till ekv(28) på formen

$$X(x) = ax$$

och tillhörande egenfunktion

$$\underline{X_0(x) = x}$$

Sammanfattningsvis får vi ett delsvar, med $c_0 = aC_2$,

$$u(x, y) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi x \cos n\pi y \tag{29}$$

där c_n bestäms genom anpassning till randvillkoret RV2 i texten

$$u(1, y) = 1 - \cos 2\pi y = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh n\pi \cos n\pi y \tag{30}$$

Identifiering ger snabbt

$$c_0 = 1,\ c_2 = -\frac{1}{\sinh 2\pi},\ c_n = 0 \text{ för } n \neq 0 \text{ och } 2$$

Svar:

$$\boxed{u(x, y) = x - \frac{\sinh 2\pi x}{\sinh 2\pi} \cos 2\pi y}$$

---

4) Lösning

$\mathscr{L}$- transformen m a p t ger

$$\begin{aligned} U_{xx}(x,s) &= sU(x,s) - u(x,0) && (31) \\ U_{xx}(x,s) - sU(x,s) &= -u_0 - u_0 \sin\frac{x\pi}{L} && (32) \end{aligned}$$

Om vi betraktar

$$U(x,s) = U_{\text{hom}}(x,s) + U_{part,1}(x,s) + U_{part,2}(x,s) \tag{33}$$

får vi snabbt

$$U_{\text{hom}}(x,s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x}, \quad U_{part,1}(x,s) = \frac{u_0}{s} \tag{34}$$

samt för den andra partikulärlösningen ansätter vi

$$U_{part,2}(x,s) = a\cos\frac{x\pi}{L} + b\sin\frac{x\pi}{L} \tag{35}$$

och får efter enkla räkningar

$$U_{part,2}(x,s) = \frac{u_0}{s + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\sin\frac{x\pi}{L} \tag{36}$$

Härmed blir dellösningen i $\mathscr{L}-$planet

$$U(x,s) = Ae^{\sqrt{s}x} + Be^{-\sqrt{s}x} + \frac{u_0}{s} + \frac{u_0}{s + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}\sin\frac{x\pi}{L} \tag{37}$$

Återstår att anpassa de givna transformerade randvillkoren

$$U(0,s) = \frac{u_0}{s}, \quad U(L,s) = \frac{u_0}{s} \tag{38}$$

som ger direkt $A = B = 0$.
Svaret i t-planet får vi nu genom inverstransformen

$$u(x,t) = u_0\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + u_0\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + (\pi/L)^2}\right\}\sin\frac{x\pi}{L} \tag{39}$$

och får slutligen den sökta temperaturen

$$\boxed{u(x,t) = u_0 + u_0 e^{-\pi^2 t/L^2}\sin\frac{x\pi}{L}}$$

5) Lösning

Vi skall alltså lösa problemet

$$u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + u_{zz} = 0 \tag{40}$$

med randvillkoren

$$\begin{aligned}
u(\rho, 0) &= 0, \quad 0 < \rho < 1 && (41)\\
u(\rho, 2) &= f(\rho), \quad 0 < \rho < 1 && (42)\\
u(1, z) &= 0, \quad 0 < z < 2 && (43)\\
u(0, z) &\; ... \; \text{begränsad} && (44)
\end{aligned}$$

där $f(\rho) = 100 J_0(\rho)$
Vi börjar som vanligt med variabelseparation $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ och får på sedvanligt sätt

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \text{separationskonsten k} \tag{45}$$

och randvillkoren

$$R(1) = 0, R(0)...\text{begränsad och } Z(0) = 0 \tag{46}$$

$R-$ekvationen blir

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k\rho^2 R(\rho) = 0 \tag{47}$$

Den allmänna lösningen till ekv(47) är

$$R(\rho) = \begin{cases} C_1 J_0(\lambda\rho) + C_2 Y_0(\lambda\rho) & \text{om } k = -\lambda^2 < 0; \lambda > 0 \\ C_1 \ln \rho & \text{om } k = 0 \\ C_1 I_0(\lambda\rho) + C_2 K_0(\lambda\rho) & \text{om } k = \lambda^2 > 0; \lambda > 0 \end{cases} \tag{48}$$

En titt i BETA 12.4 på graferna över Besselfunktionerna ger vid handen att $Y_0(x), I_0(x),\ K_0(x)$ inte satisfierar randvillkoren (46) utom $J_0(x)$. Detta innebär att alla konstanter i tabellen (48) måste sättas till noll utom C_1 framför $J_0(\lambda\rho)$ som ger oss delsvaret $R(\rho) = C_1 J_0(\lambda\rho)$.
λ bestämmer vi nu m h a randvillkoret $R(1) = 0$. Detta betyder att $(\lambda_n 1) = \alpha_{0,n}$, där $\alpha_{0,n}$ är det n-te positiva nollstället till Besselfunktionen $J_0(x)$.
Dette ger oss egenfunktionen

$$\underline{R_n(\rho) = C_n J_0(\alpha_{0,n}\rho)}, \quad n = 1, 2, ... \tag{49}$$

Återstår att lösa $Z(z)$ m h a ekv(45) och vetskapen att $k = -\lambda = -\alpha_{0,n}^2$ och vi får differentialekvationen för Z

$$Z_n''(z) - \alpha_{0,n}^2 Z_n(z) = 0 \tag{50}$$

som har lösningen

$$Z_n(z) = A_n \cosh(\alpha_{0,n} z) + B_n \sinh(\alpha_{0,n} z) \tag{51}$$

Villkoret $Z_n(0) = 0$ kräver att $A_n = 0$. Med hjälp av superpositionsprincipen ser vi därför att allmänna lösningen till de homogena villkoren ges av

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho) \sinh(\alpha_{0,n} z) \tag{52}$$

Det återstår nu endast att bestämma koefficienterna a_n så att även det kvarvarande icke-homogena randvillkoret (42) blir uppfyllt, d v s

$$u(\rho, 2) = 100 J_0(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_{0,n}\rho) \sinh(\alpha_{0,n} 2) \tag{53}$$

Multiplikation av mellanledet och högerledet i ekv(53) med $J_0(\alpha_{0,n}\rho)$ och efterföljande integration mellan $\rho = 0$ och 1 ger

$$100 \int_0^1 J_0(\rho) J_0(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho = a_n \sinh(\alpha_{0,n} 2) \int_0^1 J_0^2(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho \tag{54}$$

Den högra integralen blir m h a BETA 12.4

$$\int_0^1 J_0^2(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho = \| J_0(\alpha_{0,n}\rho) \|_\rho^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_{0,n}) \tag{55}$$

Även den vänstra integralen hittar vi i BETA 12.4, nämligen i tabellen med rekursionsformler. Med $C_n = J_0$, $\alpha = 1$, $\beta = \alpha_{0,n}$, $x = \rho$ och $J_0'(x) = -J_1(x)$, allt ur samma tabell, får vi sambandet

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 J_0(\rho) J_0(\alpha_{0,n}\rho) \rho d\rho = \\
&\qquad = \frac{1}{\alpha_{0,n}^2 - 1} \left[\rho \left\{ J_0(\alpha_{0,n}\rho) J_0'(\rho) - \alpha_{0,n} J_0(\rho) J_0'(\alpha_{0,n}\rho) \right\} \right]_{\rho=0}^{1} \\
&\qquad = \frac{1}{\alpha_{0,n}^2 - 1} \left[\underbrace{1 J_0(\alpha_{0,n} 1)}_{=0} J_0'(1) - \alpha_{0,n} J_0(1) J_0'(\alpha_{0,n} 1) \right] \\
&\qquad = -\frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_0'(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1} = \frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1}
\end{aligned} \tag{56}$$

där vi i sista ledet använde $J_0'(x) = -J_1(x)$ med $x = \alpha_{0,n}$ och vi får slutligen

$$100 \frac{\alpha_{0,n} J_0(1) J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 - 1} = a_n \sinh(\alpha_{0,n} 2) \frac{J_1^2(\alpha_{0,n})}{2} \tag{57}$$

Ur detta erhåller vi

$$a_n = 200 \, \frac{\alpha_{0,n} J_0(1)}{(\alpha_{0,n}^2 - 1)\sinh(\alpha_{0,n} 2) J_1(\alpha_{0,n})} \tag{58}$$

och till sist får vi svaret

$$\boxed{u(\rho, z) = 200 \, J_0(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{0,n} J_0(\alpha_{0,n}\rho)\sinh(\alpha_{0,n} z)}{(\alpha_{0,n}^2 - 1)\sinh(\alpha_{0,n} 2) J_1(\alpha_{0,n})}}$$
