KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

Tentamen tisdag 2008–03–11, kl $08^{00} - 13^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

---

1) Bestäm med hjälp av potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den s k Frobenius's metoden, där r är ett obestämt tal, två linjärt oberoende lösningar kring $x = 0$, till ekvationen

$$9x^2y'' + 9x^2y' + 2y = 0$$

Det räcker att ta med de fyra första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

---

2) Temperaturen i en tunn stav är $u = u(x,t)$; utanför är temperaturen 0. Staven ligger på x-axeln med ändpunkter i $x = 0$ och $x = 2$.
Då gäller

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) - hu(x,t) \quad 0 < x < 2,\, t > 0$$

där k och h är positiva konstanter. Antag att

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(2,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \left(1 + 4\cos\frac{3\pi x}{2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2. \end{aligned}$$

Bestäm $u(x,t)$. (Ledning: Sätt $u(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$.)

---

3) Sök den stationära temperaturfördelningen $u = u(x,y)$, d v s lös

$$\texttt{PDE:} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

i plattan $\{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}$ med randvillkoren

$$\begin{aligned} \texttt{RV1:}\ u(0,y) &= 0, \quad \texttt{RV2:}\, u(1,y) = 1 - \cos 2\pi y \\ \texttt{RV3:}\, u_y(x,0) &= 0, \quad \texttt{RV4:}\, u_y(x,1) = 0. \end{aligned}$$

---

4) En stav med längden L hålls vid en konstant temperatur u_0 vid ändarna $x = 0, x = L$. Om stavens begynnelsetemperatur är $u(x,0) = f(x)$ lös begynnelse/randvärdes-problemet för temperaturen $u(x,t)$ med lämplig transform.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(L,t) = u_0 \\ u_(x,0) &= f(x) = u_0 + u_0 \sin\frac{x\pi}{L} \end{aligned}$$

---

5) Bestäm jämviktstemperaturen $u(\rho, z)$ av en homogen cylinder med radien $\rho = 1$ och höjden $z = 2$ genom att studera Laplace-ekvationen $\nabla^2 u = 0$ i cylinderkoordinater. Antag att temperaturen inte beror på vinkeln θ, att temperaturen på mantelytan och på undersidan är noll och att temperaturfördelningen på ovansidan, $z = 2$, är $f(\rho) = 100J_0(\rho)$. Dessutom vet vi att $u(0,z)$ är begränsad.

Lycka till!

Franz J