Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2008–05–29

1) Lösning

Frobeniusansatsen $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med respektive derivata insatt i differentialekvationen ger

$$\begin{aligned} 0 = 2x^2 &\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} \\ &+(3x+2x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \end{aligned} \tag{1}$$

som leder till

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)a_n x^{n+r} \\ &+\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} \end{aligned} \tag{2}$$

Förkortning med x^r och hopslagning av summor med samma potens av x ger

$$\begin{aligned} 0 = &\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1]a_n\, x^n \\ &+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)+1]a_n x^{n+1}}_{n+1\to n} \end{aligned} \tag{3}$$

Efter enkla räkningar fås

$$\begin{aligned} 0 =&[2r(r-1)+3r-1]a_0 \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}(n+r+1)(2n+2r-1)a_n\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2r-1)a_{n-1}\, x^n \end{aligned} \tag{4}$$

a_0 termen i ekv(4) med $a_0 \neq 0$ ger den s k <u>indexekvationen</u>

$$2r(r-1)+3r-1 = 2r^2+r-1 = 0 \tag{5}$$

som leder till

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad r_2 = -1 \tag{6}$$

Det andra och tredje sambandet i ekv(4) ger oss

$$(n+r+1)(2n+2r-1)a_n = -(2n+2r-1)a_{n-1} \tag{7}$$

som resulterar för $n \geq 1$ i rekursionsformeln

$$\boxed{a_n = -\frac{1}{n+r+1}\, a_{n-1}}$$

Fall 1: $r_1 = \frac{1}{2}$, ger $a_n = -\dfrac{2}{2n+3}\, a_{n-1} \quad \Longrightarrow$

$$a_1 = -\frac{2}{5}\, a_0, \quad a_2 = \frac{4}{35}\, a_0, \quad a_3 = -\frac{8}{315}\, a_0; \tag{8}$$

Om vi sätter $a_0 = 1$ får vi

$$y_1 = x^{1/2}\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \frac{8}{315}x^3 + ...\right) \tag{9}$$

Fall 2: $r_2 = -1$, ger $a_n = -\dfrac{1}{n}\, a_{n-1} \quad \Longrightarrow$

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = \frac{1}{2}\, a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{6}\, a_0; \tag{10}$$

Om vi även här sätter $a_0 = 1$ får vi

$$y_2 = x^{-1}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + ...\right) \tag{11}$$

och den allmänna lösningen till differentialekvationen blir

$$\boxed{y = A\, x^{1/2}\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{4}{35}x^2 - \frac{8}{315}x^3 + ...\right) + B\, x^{-1}\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + ...\right)}$$

2) Lösning

Eftersom våra randvillkor inte är homogena, vilket krävs för variabelseparation, måste vi skaffa oss sådana. Det gör vi genom att ansätta en superposition av en stationär lösning $u_s(x)$ och en (x,t)-beroende lösning $v(x,t)$.
Den stationära får vi genom att bestämma $u_s(x)$ via $u_s''(x) = 0$ med det allmänna svaret $u_s(x) = C_1 + C_2 x$.
Villkoren $u_s'(0) = 0$ och $u_s(1) = 3$ resulterar i $u_s(x) = 3$ och vi får sambanden

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \Longrightarrow \quad v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + u_s''(x) = v_{xx}(x,t) \tag{12}$$

$$u_x(0,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_x(0,t) = u_x(0,t) - u_s'(0) = 0 - 0 = 0 \tag{13}$$

$$u(1,t) = 3 \quad \Longrightarrow \quad v(1,t) = u(1,t) - u_s(1) = 3 - 3 = 0 \tag{14}$$

Vi har härmed kommit fram till att lösa ett randvärdesproblem för $v(x,t)$ med homogena randvillkor $v_x(0,t) = v(1,t) = 0$ och skall alltså studera problemet

$$\texttt{PDE:} \quad v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) \tag{15}$$

$$\texttt{RV:} \quad v_x(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0 \tag{16}$$

$$\texttt{BV:} \quad v(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} \tag{17}$$

m h a variabelseparation $v = XT$ och får det aktuella systemet

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} &= -\lambda \text{...separationskonstanten} && (18) \\ X'' + \lambda X &= 0, \quad X'(0) = 0 \quad X(1) = 0 && (19) \\ T' + \lambda T &= 0 && (20) \end{aligned}$$

Vi undersöker nu 3 olika fall:

$$\begin{aligned} \lambda = -\alpha^2 < 0;\ \alpha > 0 : X(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, && (21) \\ X'(0) &= 0, \Longrightarrow C_1 - C_2 = 0 && (22) \\ X(1) &= 0, \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0 && (23) \end{aligned}$$

Vi har endast lösningen $X \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \lambda = 0 : \quad X(x) &= C_1 + C_2 x, && (24) \\ X'(0) &= 0, \Longrightarrow C_2 = 0 && (25) \\ X(1) &= 0, \Longrightarrow C_1 = 0 && (26) \end{aligned}$$

Vi har även här endast lösningen $X \equiv 0$.

$$\begin{aligned} \lambda = \alpha^2 > 0;\ \alpha > 0 : X(x) &= C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x, && (27) \\ X'(0) &= 0, \Longrightarrow C_2 = 0 && (28) \\ X(1) &= 0, \Longrightarrow C_1 \neq 0, \cos \alpha = 0 && (29) \end{aligned}$$

Sambandet (29) innebär att $\alpha = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ och motsvarande egenfunktion blir

$$\underline{X_n = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x,\ n = 1, 2, 3, ...}$$

Ekv (20) ger $\underline{T_n = B_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t}}$ med $\lambda_n = \alpha_n^2 = \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2$ och den totala allmänna lösningen blir

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \tag{30}$$

Nu är det dags att använda begynnelsevillkoret (17)

$$v(x,0) = \cos\frac{3\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \tag{31}$$

Identifiering ger $B_2 = 1,\ B_n = 0$ för $n \neq 2$ och delsvaret blir

$$v(x,t) = \mathrm{e}^{-9\pi^2 t/4} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) x \tag{32}$$

samt slutsvaret

$$\boxed{u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) = 3 + \mathrm{e}^{-9\pi^2 t/4}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)x}$$

3) Lösning

Låt

$$\widehat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-i\omega x}dx \tag{33}$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x. Fouriertransformering av PDE'n ger

$$-\omega^2\widehat{u}(\omega,t) = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(\omega,t) \tag{34}$$

en ODE i t som har lösningen

$$\widehat{u}(\omega,t) = A(\omega)\mathrm{e}^{-\omega^2 t} \tag{35}$$

Insättning av $t = 0$ ger att integrationskonstanten blir

$$A(\omega) = \widehat{u}(\omega,0) = \mathscr{F}[\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-x^2/2}](\omega) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4} + \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/2} \tag{36}$$

Ekv(35) ger nu

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(\omega,t) &= \left(\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4} + \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/2}\right)\mathrm{e}^{-\omega^2 t} && (37)\\
&= \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/4-\omega^2 t} + \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2/2-\omega^2 t} && (38)\\
&= \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2(t+1/4)} + \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\omega^2(t+1/2)} && (39)
\end{aligned}$$

Inverstransformering m h a BETA leder till svaret:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{1+4t}} + \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\,\mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2+4t}}}$$

Observera att denna lösning endast existerar så länge $1 + 4t > 0$, d v s $t > t_0 = -\dfrac{1}{4}$!!!!

4) Lösning

Variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$\frac{T'}{2T} = \frac{X''}{X} = \lambda \tag{40}$$

och sambanden

$$\begin{aligned}
T' - 2\lambda T &= 0 && (41)\\
X'' - \lambda X &= 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(1) = 0 && (42)
\end{aligned}$$

Vi undersöker nu 3 olika fall:

$$
\begin{aligned}
\underline{\lambda = \alpha^2 > 0;\ \alpha > 0}: \quad X(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, && (43)\\
X'(x) &= \alpha(C_1 e^{\alpha x} - C_2 e^{-\alpha x}), && (44)\\
X(0) &= 0 \Longrightarrow C_1 + C_2 = 0 && (45)\\
X'(1) &= 0 \Longrightarrow C_1 = C_2 = 0 && (46)
\end{aligned}
$$

Vi har ingen icke-trivial lösning.

$$
\begin{aligned}
\underline{\lambda = 0}: \quad X(x) &= C_1 + C_2 x, && (47)\\
X'(x) &= C_2, && (48)\\
X(0) &= 0 \Longrightarrow C_1 = 0 && (49)\\
X'(1) &= 0 \Longrightarrow C_2 = 0 && (50)
\end{aligned}
$$

Vi har ingen icke-trivial lösning nu heller.

$$
\begin{aligned}
\underline{\lambda = -\alpha^2 < 0;\ \alpha > 0}: \quad X(x) &= C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x, && (51)\\
X'(x) &= \alpha(-C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x), && (52)\\
X(0) &= 0 \Longrightarrow C_1 = 0 && (53)\\
X'(1) &= 0 \Longrightarrow \alpha C_2 \neq 0,\ \cos \alpha = 0 && (54)
\end{aligned}
$$

Sambandet (54) innebär att $\alpha = (n - 1/2)\pi$ och motsvarande egenfunktion blir

$$\underline{X_n = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x,\ n = 1, 2, 3, ...}$$

Med α enligt ovan insatt i ekv(41) får vi

$$T_n = A_n \mathrm{e}^{-2\alpha_n^2 t} = A_n \mathrm{e}^{-2((2n-1)\pi/2)^2 t} \tag{55}$$

och vi får den allmänna lösningen

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{-2(\pi(n-1/2))^2 t} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x}$$

där A_n bestäms m h a det återstående begynnelsevärdet

$$u(x,0) = -x^2 + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x \tag{56}$$

Fourierserieutvecklingen av $u(x,0)$ m h a BETA ger ganska snabbt

$$A_n = 2\int_0^1 (-x^2 + 2x)\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x\,dx = ... = \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} \tag{57}$$

och problemets lösning blir då

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}\, e^{-2(\pi(n-1/2))^2 t} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}x}$$

5) Lösning

Det första randvillkoret säger att membranet är inspänt och det andra begynnelsevillkoret säger att membranet släpps från ett viloläge.
Vi separerar tid och rum med ansatsen

$$u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \tag{58}$$

och får

$$\frac{R\Theta T''}{R\Theta T} = \frac{R''\Theta T + \frac{1}{r}R'\Theta T + \frac{1}{r^2}R\Theta'' T}{R\Theta T} = k = \text{konstant} \tag{59}$$

$$\Longrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = k = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta} \tag{60}$$

Om $k \geq 0$ ser man att $T(t)$ inte blir någon svängning, alltså måste vi välja $k < 0$, säg $k = -\lambda^2, \lambda > 0$. $T(t)$ uppfyller då $T'' + \lambda^2 T = 0$, som har lösningen

$$T(t) = A\cos\lambda t + B\sin\lambda t \tag{61}$$

Det andra `BV` innebär att $T'(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$, härmed blir

$$T(t) = A\cos\lambda t \tag{62}$$

En enkel omformning av rumsdelen i sambandet(60) och $k = -\lambda^2$ ger

$$\frac{r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu^2 = \text{ny konstant} \tag{63}$$

$$\Longrightarrow \Theta'' + \mu^2\Theta = 0 \quad \text{och} \quad r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R - \mu^2R = 0 \tag{64}$$

Detta leder till 2 ODE med resp randvillkor:

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0,\ \Theta(0) = \Theta(2\pi),\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \tag{65}$$

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R - \mu^2R = 0,\ R(0) < \infty,\ R(3) = 0 \tag{66}$$

ODE(65) har lösningen $\Theta = a\cos\mu\theta + b\sin\mu\theta$ där vi måste välja $\mu = m = 0,1,2,...$ för att satisfiera randvillkoren och vi får

$$\Theta_m = a_m\cos m\theta + b_m\sin m\theta, \quad m = 0,1,2,... \tag{67}$$

Med $\mu = m$ insatt i ODE(66) får vi Bessels differentialekvation av ordning m som har lösningen

$$R(r) = CJ_m(\lambda r) + DY_m(\lambda r) \tag{68}$$

Randvillkoren $R(0) < \infty$ resp $R(3) = 0$ kräver $D = 0$ resp $R(3) = CJ_m(\lambda 3) = 0$ m a o $\lambda 3$ måste vara det n-te positiva nollställe $\alpha_{mn},\ n = 1, 2, 3, ...$ av $R(3)$. På det viset får vi egenvärdet $\lambda_{mn} = \dfrac{\alpha_{mn}}{3}$ och vi får den slutliga lösningen till ODE(66)

$$R(r) = R_{mn}(r) = C_{mn}J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{3}r\right), \quad m = 0, 1, 2, ..., n = 1, 2, 3, ... \tag{69}$$

Därmed ser vi att ansatsen $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ ger

$$\begin{aligned} u_{mn}(r, \theta, t) &= C_{mn}J_m(\lambda_{mn}r)(a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta)A \cos \lambda_{mn}t & (70)\\ &= J_m(\lambda_{mn}r)(A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) \cos \lambda_{mn}t & (71)\end{aligned}$$

där vi satte $A_{mn} = C_{mn}a_mA$ och $B_{mn} = C_{mn}b_mA$.
Superpositionsprincipen tillämpad på `PDE + RV + BV` enligt texten visar sedan att den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}u_{mn}(r, \theta, t) & (72)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \cos \lambda_{mn}t & (73)\end{aligned}$$

där vi satte $a_{mn} = c_{mn}A_{mn}$ och $b_{mn} = c_{mn}B_{mn}$.
Återstår att anpassa denna lösning till `BV`

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) = (9 - r^2)r^2 \cos 2\theta \tag{74}$$

Detta innebär att vi skall studera

$$(9 - r^2)r^2 \cos 2\theta = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn}r)(a_{mn} \cos m\theta + b_{mn} \sin m\theta) \tag{75}$$

Eftersom $f(r, \theta)$ är proportionell mot $\cos 2\theta$ blir alla $a_{mn}, b_{mn} = 0$ utom $a_{2n} \neq 0$, m a o har vi $m = 2$ enligt ekv(75). På det viset får vi ett delresultat

$$(9 - r^2)r^2 \cos 2\theta = \sum_{n=1}^{\infty} J_2(\lambda_{2n}r)a_{2n} \cos 2\theta \tag{76}$$

Genom att förkorta bort $\cos 2\theta$ ser vi att vi måste hitta koefficienter a_{2n} som uppfyller

$$(9 - r^2)r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}J_2(\lambda_{2n}r) \tag{77}$$

Besselfunktionernas ortogonalitetsegenskaper, se BETA, ger oss nu möjligheten att beräkna a_{2n} genom att multiplicera ekv(77) på båda sidor med $J_2(\lambda_{2n}r)r$ och sedan integrera r från 0 till 3, vi erhåller då, med insatt $\lambda_{2n} = \alpha_{2n}/3$

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{3} (9 - r^2)r^2 J_2\left(\frac{\alpha_{2n}}{3}r\right) r dr &= a_{2n} \int_{r=0}^{3} J_2^2\left(\frac{\alpha_{2n}}{3}r\right) r dr & (78)\\ = a_{2n}\left\| J_2\left(\frac{\alpha_{2n}}{3}r\right)\right\|_r^2 &= a_{2n}\frac{3^2 J_3^2(\alpha_{2n})}{2}, \quad \text{för} \quad 0 \leq r \leq 3 & (79)\end{aligned}$$

För att lösa integralen i VL av ekv(78) använder vi den angivna formeln på tentan:

$$\int_0^a (a^2 - r^2) r^{k+1} J_k \left(\frac{\alpha}{a} r \right) dr = 2 \, \frac{a^{k+4}}{\alpha^2} J_{k+2}(\alpha) \tag{80}$$

där vi i vårt problem har $k = 2,\ a = 3,\ \alpha = \alpha_{2n}$.
Sammanfattningsvis ger oss HL i ekv(79) och ekv(80) sambandet

$$a_{2n} \frac{3^2 J_3^2(\alpha_{2n})}{2} = 2 \, \frac{3^6}{\alpha_{2n}^2} J_4(\alpha_{2n}) \tag{81}$$

och delresultatet blir

$$a_{2n} = \frac{324 J_4(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}^2 J_3^2(\alpha_{2n})} \tag{82}$$

Detta är i sammanhanget ett fullt acceptabelt delsvar, som dock kan förenklas m h a ett samband tagen ur BETA:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \tag{83}$$

Om vi väljer $p = 3$ får vi

$$\underbrace{J_2(\alpha_{2n})}_{=0} + J_4(\alpha_{2n}) = \frac{2 \cdot 3}{\alpha_{2n}} J_3(\alpha_{2n}) \tag{84}$$

Insättning i ekv(82) leder till

$$a_{2n} = \frac{324}{\alpha_{2n}^2 J_3^2(\alpha_{2n})} \, \frac{6 J_3(\alpha_{2n})}{\alpha_{2n}} = \frac{1944}{\alpha_{2n}^3 \, J_3(\alpha_{2n})} \tag{85}$$

Lägger vi ihop alla delsvar vi har fått på vägen, så får vi slutsvaret

$$\boxed{u(r,\theta,t) = 1944 \cos 2\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2\left(\frac{\alpha_{2n}}{3} r\right) \cos\left(\frac{\alpha_{2n}}{3} t\right)}{\alpha_{2n}^3 \, J_3(\alpha_{2n})}}$$