



KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

Tentamen torsdag 2008-05-29, kl 08⁰⁰ – 13⁰⁰

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

1) Bestäm med hjälp av potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den så kallade Frobenius's metoden, där r är ett obestämt tal, två linjärt oberoende lösningar kring $x = 0$, till ekvationen

$$2x^2 y'' + (3x + 2x^2) y' - (1 - x) y = 0$$

Det räcker att ta med de fyra första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

2) Bestäm en lösning till randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \text{PDE: } & \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \text{RV: } & \begin{cases} u(1, t) = 3, & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{BV: } u(x, 0) = 3 + \cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

3) För en oändlig lång stav gäller värmeledningsekvationen

$$\text{PDE: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

Temperaturen vid $t = 0$ ges av funktionen

$$\text{BV: } u(x, 0) = e^{-x^2} + e^{-x^2/2}$$

Bestäm temperaturen $u(x, t)$ för alla $t > 0$ m h a lämplig transform.

4) Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} \text{PDE: } & \frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \text{RV: } & \begin{cases} u(0, t) = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{BV: } u(x, 0) = -x^2 + 2x, \quad 0 < x < 1.$$

5) Ett cirkulärt inspant membran med radien 3 har vid tiden $t = 0$ en avvikelse $f(r, \theta)$ från det plana jämviktsläget. Initialhastigheten är noll vid tiden $t = 0$.

Uttryckt i matematiska termer innebär detta att vi skall lösa randvärdesproblemet:

$$\begin{aligned} \text{PDE: } & \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad t > 0 \\ \text{RV: } & \begin{cases} u(3, \theta, t) = 0, \\ u(0, \theta, t) < \infty \\ u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t) \end{cases} \quad \text{BV: } \begin{cases} u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Bestäm utsvängningen $u(r, \theta, t)$ av membranet då $f(r, \theta) = (9 - r^2)r^2 \cos 2\theta$ och $c = 1$

Lycka till!

Franz J