Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K

LÖSNINGSFÖRSLAG till Tentamen 2009–03–11

---

1) Lösning

Ansätt

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

då innebär textens begynnelsevillkor att $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Vi får

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{2}$$

som leder efter insättning i den givna ODE'n ekv(1) och omindexering till

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)y'' - xy' + 9y \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 9 a_n x^n \\ &= (2a_2 + 9a_0)x^0 + (6a_3 + 8a_1)x^1 \\ &\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2-9)a_n\right] x^n \end{aligned} \tag{3}$$

Alltså gäller $2a_2 + 9a_0 = 0, 6a_3 + 8a_1 = 0$, och rekursionsformeln blir

$$a_{n+2} = \frac{(n^2-9)}{(n+1)(n+2)} a_n \tag{4}$$

Detta leder till

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0 \tag{5}$$

$$a_3 = -\frac{4}{3}, a_5 = a_7 = a_9 = \cdots = 0 \tag{6}$$

Det givna problemet får härmed lösningen

$$\boxed{y = x - \frac{4}{3}x^3}$$

---

2) Lösning

OBS: Vi har ett endimensionellt problem!

$$\begin{aligned}\texttt{PDE:}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}, &(7)\\ \texttt{RV1:}\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) &= 0;\ \texttt{RV2:}\quad u(L,t) = T_1 &(8)\\ \texttt{BV:}\,u(x,0) &= T_0. &(9)\end{aligned}$$

Vi börjar med att homogenisera RV, genom att ansätta

$$u(x,y) = u_1(x) + v(x,y) \tag{10}$$

med $u_1 = C$, där `RV2` direkt ger $C = u_1(L) = T_1$, alltså får vi

$$u(x,t) = T_1 + v(x,t) \tag{11}$$

med samma PDE, men med nya RV och BV

$$\begin{aligned}\texttt{RV:}\,v_x(0,t) &= 0,\ v(L,t) = 0 &(12)\\ \texttt{BV:}\,v(x,0) &= T_0 - T_1 &(13)\end{aligned}$$

Vi kan nu separera, $v = XT$ och får

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a}\frac{T'}{T} = -\lambda \tag{14}$$

med RV $X'(0) = 0$, $X(L) = 0$

Vi studerar nu den allmänna lösningen i följande tabell:

$$X(x) = \begin{cases} C_1\cos\alpha x + C_2\sin\alpha x & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0\\ C_1 + C_2 x & \text{om } \lambda = 0\\ C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}, & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\end{cases} \tag{15}$$

samt tabellen för derivatan

$$X'(x) = \begin{cases} \alpha(-C_1\sin\alpha x + C_2\cos\alpha x) & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0\\ C_2 & \text{om } \lambda = 0\\ \alpha(C_1 e^{\alpha x} - C_2 e^{-\alpha x}), & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\end{cases} \tag{16}$$

Med insatta randvärden fås

$$X(0) = 0 = \begin{cases} C_1 & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0\\ C_1 & \text{om } \lambda = 0\\ C_1 + C_2, & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\end{cases} \tag{17}$$

Randvillkoren för derivatan ger vid handen att

$$X'(L) = 0 = \begin{cases} C_2\cos\alpha L & \text{om } \lambda = \alpha^2 > 0; \alpha > 0\\ C_2 & \text{om } \lambda = 0\\ -C_2(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}), & \text{om } \lambda = -\alpha^2 < 0; \alpha > 0\end{cases} \tag{18}$$

Inspektion av resp tabell visar att endast $\lambda = \alpha^2 > 0$ leder till en icke trivial lösning, nämligen då $\cos \alpha L = 0$ eller $\alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$, $n = 0, 1, 2, ...$ Detta innebär att vi får egenvärden

$$\underline{\lambda_n = \alpha_n^2 = \left((2n+1)\frac{\pi}{2L}\right)^2} \tag{19}$$

och vi får enligt (15) den tillhörande egenfunktionen $\underline{X_n = \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2L}x\right)}$. och den allmänna lösningen till PDE och RV blir

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n x) \mathrm{e}^{-a\alpha_n^2 t} \tag{20}$$

där vi kan anpassa till BV

$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n x), && (21) \\ A_n &= \frac{2}{L}(T_0 - T_1) \int_{x=0}^{L} \cos(\alpha_n x) dx = \frac{4(T_0 - T_1)(-1)^n}{\pi(2n+1)} && (22) \end{aligned}$$

och får svaret

$$\boxed{u(x,t) = T_1 + \frac{4}{\pi}(T_0 - T_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(\alpha_n x)\ \mathrm{e}^{-a\alpha_n^2 t}}$$

med $\alpha_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L},\ n = 0, 1, 2, ...$

---

3) Lösning

Vi har ett 2-dimensionellt problem:
$u(x,y)$ = temperaturen i punkten (x,y), $0 < x < a,\ 0 < y < a$.
För att homogenisera `RV` ansätter vi

$$u(x,y) = u_1(x) + v(x,y) \tag{23}$$

och får direkt ur `RV3,RV4` att $u_1(x) = T_0,\ 0 < x < a$. Därför blir ansatsen

$$u(x,y) = T_0 + v(x,y) \tag{24}$$

och vi får ett problem för $v(x,y)$ som endast har ett inhomogent `RV`:

$$v(x,a) = T_0\, x(a-x) \tag{25}$$

För de övriga gäller

$$v(0,y) = 0,\ v(a,y) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{26}$$

Variabelseparation $v(x,y) = X(x)Y(y)$ ger

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} &= -\lambda = -\alpha^2,\ \alpha > 0 && (27)\\ X'' + \alpha^2 X &= 0,\ X(0) = X(a) = 0 && (28)\\ \Longrightarrow X_n(x) = \sin(\alpha_n x),\ \text{där} &\quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a},\ n = 1,2,3,\ldots && (29)\\ Y'' - \alpha_n^2 Y = 0, \quad \Longrightarrow &\quad Y_n(y) = A_n \cosh(\alpha_n y) + B_n \sinh(\alpha_n y) && (30) \end{aligned}$$

Detta leder nu till den allmänna lösningen för $v(x,y)$ m h a superpositionsprincipen

$$v(x,y) = \sum X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x)(A_n \cosh(\alpha_n y) + B_n \sinh(\alpha_n y)) \tag{31}$$

där vi kan bestämma A_n, B_n via (25) och (26)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}(x,0) &= 0 \Longrightarrow B_n = 0 && (32)\\ v(x,a) = T_0\, x(a-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) A_n \cosh(\alpha_n a) && (33) \end{aligned}$$

A_n bestäms nu genom att använda Fourierserieutveckling

$$\int_0^a T_0\, x(a-x)\sin(\alpha_n x)dx = A_n \cosh(\alpha_n a)\int_0^a \sin^2(\alpha_n x)dx = A_n\,\frac{a}{2}\,\cosh(\alpha_n a) \tag{34}$$

och vi får m h a BETA och efter litet pyssel

$$A_n \cosh(\alpha_n a) = \frac{8T_0 a^2}{(n\pi)^3}, \quad n = 1,3,5,\ldots \tag{35}$$

som resulterar i svaret, observera att $\cosh(\alpha_n a) = \cosh(n\pi)$,

$$\boxed{u(x,y) = T_0 + \frac{8T_0 a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(2n+1)\frac{\pi y}{a}}{(2n+1)^3 \cosh(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\frac{\pi x}{a}}$$

---

4) Lösning

Vi börjar som vanligt med variabelseparation $V(\rho,z) = R(\rho)Z(z)$, som insatt i `PDE`

$$V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} V_\rho + V_{zz} = 0 \tag{36}$$

ger

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = k \ldots \text{separationskonstanten} \tag{37}$$

med randvillkoren `RV`:

$$\left.\begin{aligned} V(\rho,0) &= 0\\ V(\rho,1) &= 1 \end{aligned}\right\}\quad 0 < \rho < 1 \tag{38}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} V(1,z) & = & 0 \\ V(0,z) & = & <\infty \end{array}\right\} \quad 0<z<1 \tag{39}$$

Översatt till R och Z får vi villkoren

$$Z(0)=0, \tag{40}$$

$$R(1)=0, \qquad R(0)<\infty \tag{41}$$

Eftersom vi inte kan ha en svängning i $z-$led måste vi sätta $k=-\lambda^2<0, \lambda>0$ och får

$$Z''-\lambda^2 Z=0 \Longrightarrow Z=A\cosh(\lambda z)+B\sinh(\lambda z) \tag{42}$$

där ekv(40) ger $A=0$, innebärandes att $Z(z)=\sinh(\lambda z)$, där vi satt $B=1$ eftersom vi har flera, andra konstanter kvar.
För R har vi sambandet, se ekv(37)

$$\frac{R''+\frac{1}{\rho}R'}{R}=-\lambda^2 \Longrightarrow \rho^2 R''+\rho R'+\lambda^2\rho^2 R=0 \tag{43}$$

som är Bessels differentialekvation med lösningen

$$R(\rho)=aJ_0(\lambda\rho)+bY_0(\lambda\rho) \tag{44}$$

Ekv(41) ger direkt $b=0$ och $R(1)=J_0(\lambda)=0$ vilket betyder att $\lambda=\alpha_{0,n}$ den n-te roten av J_0, $n=1,2,3,\ldots$ Alla resultat hittills sammantaget leder till produkten

$$V_n(\rho,z)=R_n(\rho)Z_n(z)=a_nJ_0(\alpha_{0,n}\rho)\sinh(\alpha_{0,n}z) \tag{45}$$

Superposition ger oss nu delsvaret

$$V(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(\rho,z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\alpha_{0,n}\rho)\sinh(\alpha_{0,n}z) \tag{46}$$

Återstår beräkningen av a_n som vi gör m h a villkoret $V(\rho,1)=1$, se ekv(38) och hamnar vid sambandet

$$V(\rho,1)=1=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0(\alpha_{0,n}\rho)\sinh(\alpha_{0,n}) \tag{47}$$

Sedvanlig ortogonalutveckling, se BETA, ger snabbt

$$\int_{\rho=0}^{1} J_0\left(\alpha_{0,n}\rho\right)\rho d\rho \;=\; a_n\sinh(\alpha_{0,n})\int_{\rho=0}^{1} J_0^2\left(\alpha_{0,n}\rho\right)\rho d\rho \tag{48}$$

$$=a_n\sinh(\alpha_{0,n})\left\|J_0\left(\alpha_{0,n}\rho\right)\right\|_\rho^2 \;=\; a_n\frac{\sinh(\alpha_{0,n})}{2}J_1^2(\alpha_{0,n}) \tag{49}$$

För beräkningen av integralen i VL av ekv(48) använder vi den i tentamen givna formeln med $p=0, a=1$ och får

$$\int_{\rho=0}^{1} J_0\left(\alpha_{0,n}\rho\right)\rho d\rho \;=\; \frac{J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}}=a_n\frac{\sinh(\alpha_{0,n})}{2}J_1^2(\alpha_{0,n}) \tag{50}$$

$$\Longrightarrow a_n \;=\; \frac{2}{\alpha_{0,n}\sinh(\alpha_{0,n})J_1(\alpha_{0,n})} \tag{51}$$

och erhåller till slut svaret

$$\boxed{V(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{0,n}\sinh(\alpha_{0,n})J_1(\alpha_{0,n})} J_0(\alpha_{0,n}\rho)\sinh(\alpha_{0,n}z)}$$

5) Lösning

Eftersom vi har **två**, från noll skilda, `BV` för $u(r,t)$ ansätter vi $u = u_1 + u_2$ med sina respektive `BV`, nämligen: vi väljer för u_1 BV $u_1(r,0) = 1 - r^2$ och $\frac{\partial u_1}{\partial t}(r,0) = 0$, samt för u_2 motsvarande BV $u_2(r,0) = 0$ och $\frac{\partial u_2}{\partial t}(r,0) = 1$.
Vi separerar u_1 i tid och rum med ansatsen

$$u_1(r,t) = R(r)T(t), \text{ med } T'(0) = 0,\ R(1) = 0,\ R(0) < \infty \tag{52}$$

och får

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = k \ldots \text{separationskonstanten} \tag{53}$$

Om $k \geq 0$ ser man att $T(t)$ inte blir någon svängning, alltså måste vi välja $k < 0$, säg $k = -\lambda^2, \lambda > 0$. $T(t)$ uppfyller då $T'' + \lambda^2 c^2 T = 0$, som har lösningen

$$T(t) = A\cos(\lambda ct) + B\sin(\lambda ct) \tag{54}$$

Det andra `BV` innebär att $T'(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$, härmed blir

$$T(t) = A\cos(c\lambda t) \tag{55}$$

En enkel omformning av rumsdelen i sambandet(53) och $k = -\lambda^2$ ger

$$r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0 \tag{56}$$

Detta är Bessels differentialekvation och har Besselfunktionen av 0-te ordning som lösning, m a o

$$R(r) = CJ_0(\lambda r) + DY_0(\lambda r) \tag{57}$$

Randvillkoren $R(0) < \infty$ resp $R(1) = 0$ kräver $D = 0$ resp $R(1) = CJ_0(\lambda) = 0$ m a o λ måste vara det n-te positiva nollställe $\alpha_{0,n},\ n = 1, 2, 3, ...$ av J_0. På det viset får vi egenvärdet $\lambda_{0,n} = \alpha_{0,n}$ och vi får den slutliga lösningen till ODE(56)

$$R_n(r) = C_n J_0(\alpha_{0,n} r), \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{58}$$

Därmed ser vi att ansatsen $u_1(r,t) = R(r)T(t)$ leder till

$$u_{1,n}(r,t) = B_n J_0(\alpha_{0,n} r)\cos(\alpha_{0,n} ct) \tag{59}$$

där vi satte amplituderna till en enda konstant $B_n = C_n A$.
Superpositionsprincipen leder sedan till den allmänna lösningen

$$u_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\alpha_{0,n} r)\cos(\alpha_{0,n} ct) \tag{60}$$

Återstår att anpassa denna lösning till `BV`

$$u(r,0) = f(r) = 1 - r^2 \tag{61}$$

Detta innebär att vi skall studera

$$1 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\alpha_{0,n} r) \tag{62}$$

Besselfunktionernas ortogonalitetsegenskaper, se BETA, ger oss nu möjligheten att beräkna B_n genom att multiplicera ekv(62) på båda sidor med $J_0(\alpha_{0,n} r) r$ och sedan integrera r från 0 till 1, vi erhåller då

$$\int_{r=0}^{1} (1 - r^2) J_0 (\alpha_{0,n} r)\, r dr \;=\; B_n \int_{r=0}^{1} J_0^2 (\alpha_{0,n} r)\, r dr \tag{63}$$

$$= B_n \left\| J_0 (\alpha_{0,n} r) \right\|_r^2 \;=\; \frac{1}{2} B_n J_1^2(\alpha_{0,n}), \quad \text{för} \quad 0 \leq r \leq 1 \tag{64}$$

För att lösa integralen i VL av ekv(63) använder vi den angivna formeln på tentan:

$$\int_0^a (a^2 - r^2) r^{k+1} J_k \left(\frac{\alpha}{a} r \right) dr = 2 \, \frac{a^{k+4}}{\alpha^2} J_{k+2}(\alpha) \tag{65}$$

där vi i vårt problem har $k = 0, \; a = 1, \; \alpha = \alpha_{0,n}$.
Sammanfattningsvis ger oss HL i ekv(64) och ekv(65) sambandet

$$\frac{2}{\alpha_{0,n}^2} J_2(\alpha_{0,n}) = \frac{1}{2} B_n J_1^2(\alpha_{0,n}) \tag{66}$$

och delresultatet blir

$$B_n = \frac{4 J_2(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 J_1^2(\alpha_{0,n})} \tag{67}$$

Detta är i sammanhanget ett fullt acceptabelt delsvar, som dock kan förenklas m h a ett samband tagen ur BETA, som även finns i början av denna tentamen:

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \tag{68}$$

Om vi väljer $p = 1$ får vi

$$\underbrace{J_0(\alpha_{0,n})}_{=0} + J_2(\alpha_{0,n}) = \frac{2}{\alpha_{0,n}} J_1(\alpha_{0,n}) \tag{69}$$

Insättning i ekv(67) och hyfsning leder till

$$B_n = \frac{4 J_2(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}^2 J_1^2(\alpha_{0,n})} = \frac{8}{\alpha_{0,n}^3 \, J_1(\alpha_{0,n})} \tag{70}$$

Lägger vi ihop alla delsvar vi har fått på vägen, så får vi slutsvaret för u_1

$$\boxed{u_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\alpha_{0,n}^3 \, J_1(\alpha_{0,n})} J_0 (\alpha_{0,n} r) \cos (\alpha_{0,n} c t)}$$

Nu skall vi studera $u_2(r,t)$.
Eftersom den enda skillnaden i att beräkna u_2 och u_1 är de olika begynnelsevillkoren, kan vi direkt ansätta en lösning m h a ekv(54) och ekv(58)

$$u_{2,n}(r,t) = J_0(\alpha_{0,n}r)\left(a_n\cos(\alpha_{0,n}ct) + b_n\sin(\alpha_{0,n}ct)\right) \tag{71}$$

BV $u_{2,n}(r,0) = 0$ innebär $a_n = 0$. Detta och superposition ger

$$u_2(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\alpha_{0,n}r)\sin(\alpha_{0,n}ct) \tag{72}$$

Nu är det dags för anpassning via BV $\frac{\partial u_2}{\partial t}(r,0) = g(r) = 1$ och vi får

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0(\alpha_{0,n}r)\alpha_{0,n}c \tag{73}$$

b_n bestäms nu på samma sätt som vi använde för att beräkna B_n ovan, alltså

$$\int_{r=0}^{1} J_0\left(\alpha_{0,n}r\right) r dr \;=\; b_n\alpha_{0,n}c \int_{r=0}^{1} J_0^2\left(\alpha_{0,n}r\right) r dr \tag{74}$$

$$= b_n\alpha_{0,n}c\left\|J_0\left(\alpha_{0,n}r\right)\right\|_r^2 \;=\; \frac{1}{2}b_n\alpha_{0,n}cJ_1^2(\alpha_{0,n}) \tag{75}$$

Integralen i VL av ekv(74) löser vi igen m h a den givna formeln i början av tentan, sätter $p = 0, a = 1$ och får

$$\int_{r=0}^{1} J_0\left(\alpha_{0,n}r\right) r dr = \frac{J_1(\alpha_{0,n})}{\alpha_{0,n}} \tag{76}$$

Slutligen får vi

$$b_n = \cdots = \frac{2}{\alpha_{0,n}^2 c J_1(\alpha_{0,n})} \tag{77}$$

som insatt i ekv(72) och med $c = 10$ ger oss det andra delsvaret

$$\boxed{u_2(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5\,\alpha_{0,n}^2\, J_1(\alpha_{0,n})} J_0\left(\alpha_{0,n}r\right)\sin\left(10\alpha_{0,n}t\right)}$$

Slutsvaret fås nu till

$$\boxed{u(r,t) = u_1(r,t) + u_2(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_{0,n}r\right)}{J_1(\alpha_{0,n})\alpha_{0,n}^2}\left[\frac{8\cos\left(10\alpha_{0,n}t\right)}{\alpha_{0,n}} + \frac{\sin\left(10\alpha_{0,n}t\right)}{5}\right]}$$