KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K Matematik FK

Tentamen onsdag 2009–03–11, kl $14^{00} - 19^{00}$

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.
Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

Tre, ibland användbara, formler:

För $k \geq 0$, $a > 0$, $\alpha > 0$ och $p \geq 0$ gäller

$$\boxed{\int_{r=0}^{a} (a^2 - r^2) r^{k+1} J_k\left(\frac{\alpha}{a} r\right) dr = 2\,\frac{a^{k+4}}{\alpha^2} J_{k+2}(\alpha)}$$

$$\boxed{J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x), \text{ samt } \int_0^a x^{p+1} J_p\left(\frac{\alpha_n}{a} x\right) dx = \frac{a^{p+2}}{\alpha_n} J_{p+1}(\alpha_n)}$$

---

1) Bestäm med hjälp av en potensserieansats lösningen till differentialekvationen

$$(1 - x^2) y'' - x y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

---

2) En homogen cylindrisk stav av ändlig längd L är värmeisolerad på mantelytan och en av de cirkulära ändytorna. Under lång tid hålls den andra ändytan på temperaturen T_0. Vid tiden $t = 0$ ändras temperaturen till $T_1 > T_0$. Vi lägger den isolerade ändytan vid $x = 0$ och har då följande problem för $t > 0$:

$$\begin{aligned} \texttt{PDE:}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ \texttt{RV1:}\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= 0;\ \texttt{RV2:}\ u(L,t) = T_1,\ t > 0 \\ \texttt{BV:}\ u(x,0) &= T_0,\ 0 < x < L. \end{aligned} \tag{2}$$

Beräkna temperaturfunktionen $u(x,t)$.

---

3) En tunn kvadratisk homogen metallskiva har kantlängden a och tjockleken $h << a$. De kvadratiska randytorna $z = 0$ och $z = h$ samt randytan $y = 0$ är värmeisolerade. Randytorna $x = 0$ och $x = a$ hålls vid konstant temperatur T_0. Den återstående randytan har temperaturen

$$u(x,a) = T_0 + T_0\, x(a - x);\quad 0 \le x \le a \tag{3}$$

Vi skall alltså studera problemet

$$\begin{aligned} \texttt{PDE:}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a,\ 0 < y < a \\ \texttt{RV1:}\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= 0,\ \texttt{RV2:}\ \ u(x,a) = T_0 + T_0\, x(a-x),\ 0 < x < a \\ \texttt{RV3:}\ u(0,y) &= T_0,\ \texttt{RV4:}\ \ u(a,y) = T_0,\ \ 0 < y < a. \end{aligned} \tag{4}$$

Beräkna den stationära temperaturfördelningen $u(x,y)$ i skivan.

---

4) Bestäm den elektriska potentialen $V(\rho,z)$ i en burk om mantelytan och bottenytan har potentialen 0 medan locket har potentialen 1 Volt.
Randvärdesproblemet för $V(\rho,z)$ beskrivs av följande samband:

$$\texttt{PDE:}\ \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < \rho < 1,\ \ 0 < z < 1 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\texttt{RV1:}V(1,z) = 0, &&\texttt{RV2:}V(0,z) < \infty, \quad 0 < z < 1 \\ &\texttt{RV3:}V(\rho,0) = 0, &&\texttt{RV4:}V(\rho,1) = 1, \quad\ 0 < \rho < 1 \end{aligned}$$

---

5) Ett tunt, cirkulärt inspänt membran med radien $r = 1$, $c = 10$ har vid tiden $t = 0$ en avvikelse $f(r)$ från det plana jämviktsläget, samt initialhastigheten $g(r)$.
Bestäm utsvängningen $u(r,t)$ av membranet.
I matematiska termer innebär detta att vi skall lösa begynnelse/randvärdesproblemet:

$$\texttt{PDE:}\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < 1,\ \ t > 0 \tag{6}$$

$$\texttt{RV:}\begin{cases} \texttt{1)}\ \ u(1,t) = 0, \\ \texttt{2)}\ \ u(0,t) < \infty \end{cases} \qquad \texttt{BV:}\begin{cases} \texttt{1)}\ \ u(r,0) = f(r) = 1 - r^2, \\ \texttt{2)}\ \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,0) = g(r) = 1 \end{cases}$$

Alla villkor gäller för $0 < r < 1,\ \ t > 0$.

Lycka till!

Franz J