Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2010-03-15, Partiella differentialekvationer för ME och K.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen och randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$
$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = -n^2$ och $X(x) = B\sin nx$.

Ekvationen för T blir nu $T'' + 4n^2 T = 0$, med lösningar

$$T(t) = a\cos 2nt + b\sin 2nt.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin nx(a\cos 2nt + b\sin 2nt), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx\,(a_n\cos 2nt + b_n\sin 2nt).$$

Nu ska begynnelsevillkoren satisfieras. Vi har

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx,$$

så jämförelse med de givna begynnelsevillkoren ger direkt att

$$a_2 = 5, \qquad a_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 2,$$
$$2\cdot 3\cdot b_3 = 6, \qquad 2nb_n = 0 \quad \text{för} \quad n \neq 3$$

Vi får därmed svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = 5\sin 2x\cos 4t + \sin 3x\sin 6t.$$

2. a) Vi har

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r},$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r},$$

vilket ger

$$x^2y'' + 3xy' + (1+\lambda x)y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [((n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1)a_n + \lambda a_n] x^{n+r+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)^2 a_n + \lambda a_{n-1}] x^{n+r},$$

där vi har satt $a_{-1} = 0$.

Denna potensserie ska vara $= 0$, vilket betyder att alla koefficienter måste vara $= 0$. För $n = 0$ ger detta "indexekvationen" $(r+1)^2 = 0$, med dubbelroten $r = -1$.

För $n \geq 1$ får vi (med $r = -1$)

$$n^2 a_n + \lambda a_{n-1} = 0$$

och därmed rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{\lambda}{n^2} a_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Med $a_0 = 1$ ger detta lösningen

$$y(x) = x^{-1}(1 - \lambda x + \frac{\lambda^2}{4}x^2 - \frac{\lambda^3}{36}x^3 + \dots) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n x^n}{(n!)^2}.$$

b) Skriv först ekvationen på normalform:

$$y'' + \frac{3}{x}\, y' + (\frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x})\, y = 0.$$

De två första termerna blir en exakt derivata om vi multiplicerar ekvationen med faktorn

$$e^{\int \frac{3}{x} dx} = x^3.$$

Resultatet blir

$$(x^3 y')' + (x + \lambda x^2) y = 0,$$

som är på önskade formen med

$$p(x) = x^3, \quad q(x) = x, \quad r(x) = x^2.$$

3. Innan vi genomför variabelseparation måste vi subtrahera bort inhomogeniteten i randvillkoren. Funktionen

$$u_0(x,t) = \frac{5x}{\pi}$$

uppfyller differentialekvationen och randvillkoren, så om vi skriver

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{5x}{\pi}$$

så får vi att v ska lösa problemet

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases} \qquad v(x,0) = 2\cos x - \frac{5x}{\pi}.$$

Ansatsen, för differentialekvationen plus randvillkor,

$$v(x,t) = X(x)T(t)$$

ger att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = k.$$

För X ger detta (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att λ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n\pi$ $(n = 1, 2, \dots)$, $k = -n^2$ och därmed

$$X(x) = B\sin n\pi x.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T: $T' + n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-n^2t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$v(x,t) = B\sin nx \cdot Ce^{-n^2t}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2t}\sin nx.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t = 0$ ger

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

Denna sinusserie ska vara $= 2\cos x - \frac{5x}{\pi}$, vilket ger

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (2\cos x - \frac{5x}{\pi})\sin nx \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n-1)x + \sin(n+1)x)\,\mathrm{d}x + \frac{10}{\pi^2}\Big[\frac{x\cos nx}{n}\Big]_0^\pi - \frac{10}{\pi^2}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \cdots = \frac{4(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)} + \frac{10(-1)^n}{n\pi}.$$

Då $n = 1$ ska den första termen tolkas som $= 0$. Detta ger till slut lösningen

$$u(x,t) = \frac{5x}{\pi} + \sum_{n=2}^\infty \frac{4(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)}\,e^{-n^2t}\sin nx + \sum_{n=1}^\infty \frac{10(-1)^n}{n\pi}\,e^{-n^2t}\sin nx.$$

4. Låt

$$\hat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x (Vi använder BETA:s definition av Fouriertransformen). Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$i\omega\frac{\partial\hat{u}(\omega,t)}{\partial t} = 5(i\omega)^2\hat{u}(\omega,t).$$

Denna ordinära differentialekvation i t har den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)e^{5i\omega t}.$$

För $t = 0$ fås $\hat{u}(\omega,0) = A(\omega)$, dvs $A(\omega)$ ska vara Fouriertransformen till den givna initialfunktionen, dvs. $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$, där $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Här behöver man egentligen inte beräkna $\hat{f}(\omega)$, ty om man använder den allmänna egenskapen hos Fouriertransformen att en faktor $e^{ia\omega}$ på transformsidan svarar mot en förskjutning $x \mapsto x + a$ på ursprungssidan så får man direkt, med $a = 5t$, att

$$u(x,t) = f(x+5t) = \frac{2}{1+(x+5t)^2}.$$

Om man inte upptäcker detta argument kan man använda t.ex. tabellingång F41b i BETA (3:e uppl.) för att få fram $\hat{f}(\omega)$. Men man måste ändå till slut använda förskjutningsegenskapen (F7 i BETA).

5. a) Den sedvanliga variabelseparationen ger först att

$$\frac{i\hbar T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}) = \text{konstant} = E.$$

Den ekvation för T som detta ger har allmän lösning

$$T(t) = Ce^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

Därefter inser man att Φ''/Φ måste vara konstant (eftersom inget annat beror på φ). Att $\Phi(\varphi)$ ska vara 2π-periodisk ger att konstanten måste vara på formen $-m^2$, där $m \geq 0$ är ett heltal, så att ekvationen blir

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0,$$

med allmän lösning (på komplex form) $\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$. Alltså baslösningar $e^{\pm im\varphi}$. (Reell form, med $\cos m\varphi$ och $\sin m\varphi$, går lika bra.)

Vi har nu två separationskonstanter, E och m (där vi ännu inte vet så mycket om E). Sätter vi in dessa i den översta ekvationen (andra likhetstecknet där) får vi följande ekvation för $R(r)$:

$$r^2R'' + rR' + (\frac{2\mu E}{\hbar^2}r^2 - m^2)R = 0.$$

Detta är en form av Bessels differentialekvation (BETA, sid 264), och den enda lösning som är regulär i origo är (se BETA)

$$R(r) = AJ_m(\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}r)$$

(A konstant).

Nu har vi ett randvillkor som säger att $R(1) = 0$. Detta ger att $\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} = \alpha_{m,j}$ för något $j = 1, 2, \ldots$. Detta ger de efterfrågade energinivåerna

$$E = E_{m,j} = \frac{\hbar^2\alpha_{m,j}^2}{2\mu}$$

($m = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$). Tillhörande tillstånd för vågfunktionen blir (bortsett från normeringen)

$$\psi(r, \varphi, t) = J_m(\frac{\sqrt{2\mu E_{m,j}}}{\hbar}r)e^{\pm im\varphi}e^{-\frac{iE_{m,j}}{\hbar}t}.$$

Här kan $e^{\pm im\varphi}$ bytas mot $e^{im\varphi}$ om man låter m genomlöpa alla heltal. Då måste J_m ersättas med $J_{|m|}$ och $E_{m,j}$ med $E_{|m|,j}$. Detta skrivsätt används i b) nedan.

b) Den allmänna lösningen till Schrödingerekvationen med randvillkor blir nu

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{m,j}J_{|m|}(\frac{\sqrt{2\mu E_{|m|,j}}}{\hbar}r)e^{im\varphi}e^{-\frac{iE_{|m|,j}}{\hbar}t}.$$

Sätter vi in $t = 0$ och identifierar med den givna initialfunktionen får vi omedelbart lösningen

$$\psi(r, \varphi, t) = 2J_3(\frac{\sqrt{2\mu E_{3,4}}}{\hbar}r)e^{3i\varphi}e^{-\frac{iE_{3,4}}{\hbar}t} + 6J_7(\frac{\sqrt{2\mu E_{7,8}}}{\hbar}r)e^{7i\varphi}e^{-\frac{iE_{7,8}}{\hbar}t}.$$