Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2010-04-17, SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

---

1. Origo är en regulär punkt för ekvationen, så det räcker att göra en ansats av typen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Detta ger, efter sedvanliga räkningar, rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

för koefficienterna ($n \geq 0$). De två första koefficientarna, a_0 och a_1, kan väljas fritt, varvid valen $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ resp. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ger två linjärt oberoende lösningar:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 \qquad \text{(exakt)},$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{10}x^5 + \dots.$$

Anm: Differentialekvationen är Legendres ekvation av ordning 2, och $y_1(x) = -\frac{1}{2}P_2(x)$, där P_n betecknar Legendrepolynomet av grad n.

2. Variabelseparation för differentialekvationen tillsammans med randvillkoren i x-led (som är homogena), och efterföljande superposition, ger den allmänna lösningen

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2} \sinh\frac{n\pi y}{2}$$

till den nämnda delen av problemet.

Randvillkoren i y-led ger sedan värdena på koefficienterna B_n, och lösningen blir till slut

$$u(x,y) = \frac{5}{\sinh \pi} \sin\frac{2\pi x}{2} \sinh\frac{2\pi y}{2} + \frac{7}{\sinh\frac{3\pi}{2}} \sin\frac{3\pi x}{2} \sinh\frac{3\pi y}{2}.$$

3. Här gör man variabelseparation som vanligt, t.ex.

$$\psi(x,t) = X(x)T(t),$$

för differentialekvationen och randvillkoren. Detta ger

$$i\hbar\frac{T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{X''}{X} = k,$$

där k är konstant. Ekvationen för X blir

$$X'' + \frac{2\mu k}{\hbar^2} X = 0.$$

Det följer att k måste vara positiv, närmare bestämt

$$k = \hbar^2 n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

med tanke på aktuellt värde på μ och på randvillkor. Detta ger efter lösning av T-ekvationen och superposition

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, e^{-i\hbar n^2 \pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Till slut har vi begynnelsevillkoret att ta hänsyn till. Detta ger lösningen

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - \cos \frac{n\pi}{2}) \, e^{-i\hbar n^2 \pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

4. Vi Laplacetransformerar i t-led, och sätter

$$U(x,s) = \int_0^{\infty} u(x,t) e^{-st} \, dt.$$

Differentialekvationen inklusive begynnelsevillkor blir

$$s^2 \cdot U(x,s) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{12}{s^2},$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 \cdot U(x,s) = -\frac{12}{s^2}.$$

Detta är en inhomogen linjär differentialtialekvation med konstanta koefficienter med x som oberoende variabel. Den "homogena lösningen" är $U_{hom} = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx}$, och en partikulär lösning är $U_{part} = 12/s^4$. Den fullständiga lösningen är därmed

$$U(x,s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{12}{s^4}.$$

Antagandet att $u(x,t)$ är begränsad då $x \to \infty$ leder till slutsatsen att $A(s) = 0$ för alla s. Det återstående randvillkoret ger sedan $U(x,s) = 0$, varav $B(s) = -12/s^4$. Alltså har vi

$$U(x,s) = -\frac{12}{s^4} \cdot e^{-sx} + \frac{12}{s^4}.$$

Eftersom $\frac{12}{s^4} = \mathcal{L}(2t^3)$ ger inverstransformering av ovanstående lösningen

$$u(x,t) = 2(t^3 - (t-x)^3 H(t-x)) = \begin{cases} 2t^3 & \text{då} \quad t < x, \\ 2(t^3 - (t-x)^3) & \text{då} \quad t > x. \end{cases}$$

5. a) Ekvationen är av Eulertyp. Antingen gör man ansatsen $R(r) = r^\alpha$ (eller en motsvarande fullständig potensserieansats) eller så gör man substitutionen $r = e^t$. Man får indexrötter, eller karakteristiska rötter, $\alpha = n$ och $\alpha = -n-1$, och den allmänna lösningen blir

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Här måste $B = 0$ på grund av kravet då $r \to 0$.

b) Insättning av $Y = \Theta\Phi$ i ekvationen $\Lambda Y = \lambda Y$ ger (med $\lambda = -n(n+1)$)

$$\frac{\Theta''}{\Theta} + \cot\theta\,\frac{\Theta'}{\Theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\Phi''}{\Phi^2} = -n(n+1).$$

Efter multiplikation med $\sin^2\theta$ inser man att Φ''/Φ måste vara konstant, och med tanke på att $\Phi(\varphi)$ ska vara 2π-periodisk så måste denna konstant vara på formen $-m^2$ för något heltal m; lösningarna för Φ blir då

$$\Phi(\varphi) = Ce^{im\varphi}$$

(eller, på reell form, $\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$; i det senare fallet räcker det att använda heltal $m \geq 0$, i den komplexa framställningen måste man använda både positiva och negativa heltal m). Man kan visa att endast värden på m i intervallet $-n \leq m \leq n$ är aktuella. Motiveringen för detta påstående får anses ligga utanför ramen för tentan.

Ekvationen för Θ blir nu

$$\Theta'' + \cot\theta\,\Theta' + [n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}]\,\Theta = 0.$$

c) Skriv $y(s) = \Theta(\theta)$ med $s = \cos\theta$. Med hjälp av kedjeregeln fås

$$\Theta' = -\sin\theta\, y',$$

$$\Theta'' = \sin^2\theta\, y'' - \cos\theta\, y' = (1-s^2)\,y'' - sy'.$$

Insättning i ekvationen för Θ ger

$$(1-s^2)\,y'' - 2sy' + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-s^2}]\,y = 0,$$

vilket är Legendres associerade differentialekvation. Lösningarna (de associerade Legendrefunktionerna) betecknas $y = P_n^m(s)$. Vi får därmed lösningarna till Θ-ekvationen:

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\cos\theta)$$

för $n = 0, 1, 2, \ldots,\ -n \leq m \leq n$.

d) Den allmänna lösningen till Laplaces ekvation blir alltså

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\, r^n\, P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}.$$