Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2010-06-02, SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen plus randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < 1),$$
$$X(0) = X(1) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(1) = 0$ att λ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n\pi$ $(n = 1, 2, \dots)$, $k = -n^2\pi^2$ och därmed

$$X(x) = B\sin n\pi x.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T: $T' + 4n^2\pi^2 T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-4n^2\pi^2 t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin n\pi x \cdot Ce^{-4n^2\pi^2 t}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t = 0$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x = 1 - x \quad (0 < x < 1)$$

varav

$$C_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (1-x)\sin \pi x\, dx = \dots = \frac{2}{n\pi}.$$

Alltså får vi svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-4n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

2. Ansatsen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

ger

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},$$

$$xy'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1},$$

vilket ger att vänsterledet i deifferentialekvationen blir

$$4xy'' + 2y' - y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r))) a_n x^{n+r-1} - a_n x^{n+r}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r))) a_n - a_{n-1}] x^{n+r-1},$$

där vi har satt $a_{-1} = 0$. För att detta ska bli $= 0$ måste

$$(4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r))) a_n = a_{n-1}$$

för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Eftersom $a_{-1} = 0$, $a_0 \neq 0$ krävs $(n = 0)$ att

$$4r(r-1) + 2r = 0.$$

Detta är indexekvationen, och de två rötterna är $r_1 = 1/2$, $r_2 = 0$. Eftersom skillnaden här inte är ett heltal så kommer var och en av rötterna att ge en lösning på den önskade formen.

För $n = 1, 2, 3, \ldots$ fås efter lite förenkling rekursionsekvationen

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2(n+r)(2(n+r)-1)},$$

där r är den valda roten. Vi noterar att $2(n+r)$ och $2(n+r) - 1$ är två på varandra följande tal och inser att om vi fortsätter rekursionen tills a_{n-1} blir $a_0 = 1$ ($n = 1$ sista gången) så får vi det slutna uttrycket

$$a_n = \frac{1}{2(n+r)(2(n+r)-1)\ldots 2(1+r)(2(1+r)-1)}.$$

Med $r = r_1 = 1/2$ blir detta

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n)\ldots 3 \cdot 2} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

och med $r = r_2 = 0$

$$a_n = \frac{1}{2n(2n-1)\ldots 2 \cdot 1} = \frac{1}{(2n)!}.$$

Specifikt har vi, i det senare fallet t.ex., $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{24}$, $a_3 = \frac{1}{720}$.

3. Variabelseparation för differentialekvationen tillsammans med randvillkoren i x-led (som är homogena), och efterföljande superposition, ger den allmänna lösningen

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2} \sinh\frac{n\pi y}{2}$$

till den nämnda delen av problemet.

Randvillkoren i y-led ger sedan värdena på koefficienterna B_n, och lösningen blir till slut

$$u(x,y) = \frac{2}{\sinh 3\pi} \sin 3\pi x \sinh 3\pi y - \frac{1}{\sinh 4\pi} \sin 4\pi x \sinh 4\pi y.$$

4. Variabelseparation $u(\rho,t) = R(\rho)T(t)$ för PDE + RV ger

$$\frac{T'}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} = \text{konstant} = k,$$

varav

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k\rho^2 R = 0,$$
$$T' - kT = 0.$$

Den senare ekvationen har allmän lösning $T(t) = Ce^{kt}$. Det är nödvändigt att $k \leq 0$ för att $u(\rho,t)$ inte ska innehålla exponentiellt växande termer.

Skriv alltså $k = -a^2$, $a \geq 0$. Då $a > 0$ har vi en Besselekvation av ordning noll för R:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + a^2\rho^2 R = 0,$$

med allmän lösning

$$R(\rho) = AJ_0(a\rho) + BY_0(a\rho).$$

Eftersom Y_0 har en singularitet i origo, medan R ska vara regulär där, så måste $B = 0$. Att $u(\rho,t) = R(\rho)T(t)$ ska uppfylla $u(1,t) = 0$ ger sedan att $J_0(a) = 0$, dvs att a är ett av nollställena α_n. Därmed har vi

$$k = -\alpha_n^2, \quad R(\rho) = AJ_0(\alpha_n\rho), \quad T(t) = Ce^{-\alpha_n^2 t}$$

för något $n = 1, 2, \ldots$.

Fallet $a = 0$ leder till $R(\rho) = A\ln\rho$. Här måste dock $A = 0$, annars blir lösningen singulär i origo.

Superposition av de ovan uppkomna variabelseparerade lösningarna ger den allmänna lösningen till PDE + RV:

$$u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n^2 t} J_0(\alpha_n\rho).$$

Anpassning till BV ger $A_3 = 5$, $A_4 = -2$, övriga $A_n = 0$ och därigenom svaret

$$u(\rho,t) = 5e^{-\alpha_3^2 t} J_0(\alpha_3\rho) - 2e^{-\alpha_4^2 t} J_0(\alpha_4\rho).$$

5. Produktansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ för differentialekvationen plus randvillkoren ger

$$\frac{T''}{T} + 4\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \text{konstant},$$

där konstanten måste vara negativ för att det ska finnas icke-triviala lösningar X som är noll i båda ändpunkterna. Man finner på vanligt sätt att konstanten i själva verket måste vara $= -n^2$ för något $n = 1, 2, 3, \ldots$. För varje sådant n fås sedan

$$X_n(x) = C_n \sin nx,$$

$$T_n''(t) + 4T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0.$$

Den senare ekvationen är linjär med konstanta koefficienter, med karakteristisk ekvation

$$r^2 + 4r + n^2 = 0.$$

De karakteristiska rötterna blir

$$r = -2 \pm \sqrt{4 - n^2}.$$

Nu måste man dela upp i olika fall beroende på vilket tecken $4 - n^2$ har. För $n = 1$ får vi $r = -2 \pm \sqrt{3}$ och

$$T_1(t) = A_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + B_1 e^{(-2-\sqrt{3})t}.$$

För $n = 2$ har vi dubbelroten $r = -2$ och

$$T_2(t) = (A_2 + B_2 t)e^{-2t},$$

medan $n \geq 3$ ger icke-reella rötter $r = -2 \pm i\sqrt{n^2 - 4}$ och

$$T_n(t) = e^{-2t}(A_n \cos \sqrt{n^2 - 4}\, t + B_n \sin \sqrt{n^2 - 4}\, t).$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen plus randvillkor blir nu en godtycklig linjär blandning av de erhållna produktlösningarna:

$$u(x,t) = (A_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + B_1 e^{(-2-\sqrt{3})t}) \sin x + (A_2 + B_2 t)e^{-2t} \sin 2x$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} e^{-2t}(A_n \cos \sqrt{n^2 - 4}\, t + B_n \sin \sqrt{n^2 - 4}\, t) \sin nx$$

(de tidigare koefficienterna C_n framför $\sin nx$ kan bakas in i konstanterna A_n och B_n).

Till slut ska alla konstanter bestämmas genom anpassning till begynnelsevillkoren. Villkoret $u(x,0) = \sin 3x$ ger $A_1 + B_1 = 0$, $A_3 = 1$, övriga A_n lika med noll, varefter det återstående begynnelsevillkoret ger $A_1 = -B_1 = 1$, övriga B_n lika med noll. Den slutliga lösningen blir därmed

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (e^{(-2+\sqrt{3})t} - e^{(-2-\sqrt{3})t}) \sin x + e^{-2t} \cos \sqrt{5}\, t \sin 3x \\ &= e^{-2t}(2 \sinh \sqrt{3}\, t \sin x \cos \sqrt{5}\, t \sin 3x). \end{aligned}$$