Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2010-03-15, Partiella differentialekvationer för ME och K.

---

1. Den allmänna lösningen till PDE + RV är på formen $u = v + u_0$, där v är den allmänna lösningen till motsvarande problem med homogena randvillkor, dvs.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 50\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v(5,t) = 0, \end{cases}$$

och u_0 är en "partikulär" lösning (till PDE+RV), t.ex.

$$u_0(x,t) = 20x.$$

Variabelseparationsansatsen $v(x,t) = X(x)T(t)$ ger

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 50\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 50\lambda,$$

som för X:s del leder till (Sturm-Liouville-) problemet

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \qquad (0 < x < 5), \\ X(0) = X(5) = 0. \end{cases}$$

Om $\lambda \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi antar att $\lambda = -\mu^2 < 0$, för något $\mu > 0$. Då har vi

$$X(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(5) = 0$ att 5μ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\mu = \frac{n\pi}{5}$ $(n = 1, 2, \dots)$, varvid

$$50\lambda = -2n^2\pi^2$$

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

För T blir ekvationen nu

$$T' + 2n^2\pi^2 T = 0,$$

med lösningar

$$T(t) = Ce^{-2n^2\pi^2 t}.$$

Vi har alltså funnit produktlösningarna

$$v(x,t) = B\sin\frac{n\pi x}{5} \cdot Ce^{-2\frac{n^2\pi^2}{t}}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{5},$$

$$u(x,t) = 20x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{5}.$$

Nu ska begynnelsevillkoret BV satisfieras. Insättning av $t = 0$ i ovanstående ger

$$u(x,0) = 20x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{5},$$

vilket ska vara identiskt lika med 20. Koefficienterna B_n ska därför vara Fourier-sinus-koefficienterna för funktionen $20 - 20x$:

$$B_n = \frac{2}{5}\int_0^5 20(1-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,\mathrm{d}x = \frac{40}{n\pi}(1 + 4(-1)^n)$$

(enkla räkningar har utelämnats). Därmed har vi svaret

$$u(x,t) = 20x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n\pi}(1+4(-1)^n) e^{-2n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{5}.$$

Asymptotiskt återfinner vi den tidigare använda (stationära) lösningen

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 20x.$$

2. a) Vi söker först produktlösningar $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ till differentialekvationen, som blir

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Den sista termen beror bara på φ, de två första bara på r. Det följer att dessa delar måste vara konstanta var för sig. Φ måste dessutom vara 2π-periodisk, vilket gör att konstanten för Φ-delen måste vara på formen $-n^2$, $n \geq 0$ heltal. Ekvationen för Φ blir då

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0,$$

med lösningar

$$\Phi(\varphi) = a\varphi + b \qquad (n = 0),$$

$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \qquad (n \geq 1).$$

I första fallet måste $a = 0$ för att Φ ska vara periodisk.

För R får vi ekvationen

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0.$$

Detta är en Eulerekvation. Ansatsen $R = r^\rho$ ger indexekvationen $\rho(\rho-1) + \rho - n^2 = 0$ med lösningar $\rho = \pm n$. Detta ger

$$R = A + B\ln r \qquad (n = 0),$$

$$R = Ar^n + Br^{-n} \qquad (n \geq 1).$$

I båda fallen måste $B = 0$ för att R (och därmed u) inte ska få en singularitet i origo. Superponerar vi nu alla produktlösningar $R(r)\Phi(\varphi)$ som erhållits ovan så får vi efter omdöpning av konstanterna den allmänna lösningen till Laplaces ekvation på formen:

$$u(r,\varphi) = A + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

b) Ovanstående ska anpassas till randvillkoret. Vi har

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Med $r = 2$ ser vi att a_n, b_n ska väljas så att

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 8\cos^2\varphi - 4 = 4\cos 2\varphi.$$

Detta ger omedelbart att $a_2 = 1$ och att övriga a_n och b_n är lika med noll. För A får vi dock ingen information. Det följer att lösningen till randvärdesproblemet är

$$u(r,\varphi) = A + r^2 \cos 2\varphi,$$

med A en godtycklig reell konstant.

c) I detta fall blir villkoret på koefficienterna

$$\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 8\cos^2\varphi - 5 = 4\cos 2\varphi - 1,$$

som ej kan uppfyllas för något val av a_n, b_n eftersom vänsterledet, om det betraktas som en Fourierserie, saknar konstantterm medan högerledet skulle kräva konstanttermen -1. (Problemet i c) är att sådana Neumanndata har föreskrivits att $\oint \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s \neq 0$, vilket strider mot Gauss' sats då $\Delta u = 0$ i området.) Antalet lösningar i c) är alltså noll.

3. Låt

$$\hat{u}(\omega,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x (vi använder Asmars definition av Fouriertransformen). Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$\frac{\partial \hat{u}(\omega,t)}{\partial t} - (2+\cos t)\cdot i\omega\hat{u}(\omega,t) = 0.$$

Detta är en linjär differentialekvation av första ordningen i t, som vi löser genom att först multiplicera med den integrerande faktorn

$$e^{-i\omega\int(2+\cos t)\,\mathrm{d}t} = e^{-i\omega(2t+\sin t)}$$

(eftersom bara en integrerande faktor behövs behöver vi inte bry oss om integrationskonstanter). Resultatet blir, efter förenkling,

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\omega(2t+\sin t)}\cdot\hat{u}(\omega,t)) = 0,$$

vilket ger

$$\hat{u}(\omega,t) = A(\omega)e^{-i\omega(2t+\sin t)}.$$

För $t=0$ fås $\hat{u}(\omega,0) = A(\omega)$, dvs $A(\omega)$ ska vara Fouriertransformen till den givna initialfunktionen $f(x) = e^{-4|x|}$. Här behöver man egentligen inte beräkna $\hat{f}(\omega)$, ty om man använder den allmänna egenskapen hos Fouriertransformen att en faktor $e^{ia\omega}$ på transformsidan svarar mot en förskjutning $x \mapsto x+a$ på ursprungssidan så får man direkt, med $a = 2t + \sin t$, att

$$u(x,t) = f(x + 2t + \sin t) = e^{-4|x+2t+\sin t|}.$$

4. a) Variabelseparation ger

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = x\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{X'(x)}{X(x)} = \text{konstant} = \lambda,$$

$$\begin{cases} T'' - \lambda T = 0, \\ xX'' + X' - \lambda X = 0, \end{cases}$$

där vi omedelbart ser att $\lambda < 0$ är det rätta tecknet. Skriv $\lambda = -\mu^2$, där $\mu > 0$. För T har vi då

$$T(t) = A\cos\mu t + B\sin\mu t,$$

och ekvationen för X blir

$$xX'' + X' + \mu^2 X = 0$$

b) Med $s = 2\sqrt{x}$, $y(s) = X(x)$ finner man med hjälp av kedjeregeln att

$$X'(x) = \frac{2}{s}y'(s),$$

$$xX''(x) = y''(s) - \frac{1}{s}y'(s),$$

vilket gör att differentialekvationen för y blir

$$s^2y'' + sy's + \mu^2s^2y = 0.$$

Detta är Bessels differentialekvation av ordning noll på parametrisk form. Variabelsubstitutionen $z = \mu s$, $Z(z) = y(s)$ bringar den på standardformen $z^2Z'' + zZ' + z^2Z = 0$.

c) Eftersom den senare ekvationen har den allmänna lösningen $Z = AJ_0 + BY_0$ och vårt randvärdesproblem är (med tanke på substitutionen $s = 2\sqrt{x}$)

$$\begin{cases} s^2y'' + sy's + \mu^2s^2y = 0 \quad (0 < s < 6), \\ \lim_{s\to 0} y(s) = \text{ändligt}, \quad y(6) = 0, \end{cases}$$

så måste $B = 0$ (eftersom Y_0 är singulär i origo) och

$$y(s) = AJ_0(\mu s),$$

där $\mu > 0$ är vald så att $J_0(6\mu) = 0$. Detta ger

$$\mu = \frac{\alpha_n}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

med beteckningar som i texten. Vi finner också att $\lambda = -\frac{\alpha_n^2}{36}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

d) Går vi tillbaka till X och T har vi alltså funnit alla variabelseparerade lösningar, vilka efter superposition ger den allmänna lösningen till PDE + RV:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\frac{\alpha_n\sqrt{x}}{3})(A_n \cos\frac{\alpha_n t}{6} + B_n \sin\frac{\alpha_n t}{6}).$$

Derivering ger

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{6} J_0(\frac{\alpha_n\sqrt{x}}{3})(B_n \cos\frac{\alpha_n t}{6} - A_n \sin\frac{\alpha_n t}{6}),$$

och eftersom begynnelsedata redan är givna i form av Besselserier så blir koefficientbestämningen mycket enkel. Svaret blir

$$u(x,t) = 5J_0(\frac{\alpha_4\sqrt{x}}{3}) \cos\frac{\alpha_4 t}{6} + 12J_0(\frac{\alpha_7\sqrt{x}}{3}) \sin\frac{\alpha_7 t}{6}.$$

5. a) Variabelseparationsansats ger

$$\frac{i\hbar T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}).$$

Här inses att varje term måste vara konstant var för sig, vilket leder till ekvationerna

$$i\hbar T' = ET,$$

$$X'' + \alpha X = 0 \quad (0 < x < 2),$$

$$Y'' + \beta Y = 0 \quad (0 < x < 1),$$

där E, α, β är konstanter relaterade via

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}E = \alpha + \beta.$$

Med tanke på de randvillkor som X och Y ska uppfylla får vi med standardresonemang de möjliga värdena på konstanterna,

$$\alpha = \frac{m^2\pi^2}{4}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\beta = n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

samt tillhörande basfunktioner

$$X(x) = \sin\frac{m\pi x}{2}, \quad Y(y) = \sin n\pi y.$$

Detta ger för E:s del

$$E = E_{mn} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu}(\frac{m^2}{4} + n^2)$$

("energinivåerna"), och för T basfunktionerna,

$$T(t) = e^{-\frac{iE_{mn}}{\hbar}t}.$$

Efter superposition får vi den allmänna lösningen

$$\psi(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\frac{i\pi^2\hbar}{2\mu}(\frac{m^2}{4}+n^2)t} \sin\frac{m\pi x}{2} \sin n\pi y$$

till Schrödingerekvationen med randvillkor.

b) Sätter vi in $t = 0$ ovan får vi en dubbel (två variabler) sinusserie, som ska anpassas till den givna begynnelsefunktionen, som vi kan kalla $f(x, y)$. Funktionssystemet $\{\sin \frac{m\pi x}{2} \sin n\pi y : m, n = 1, 2, 3, \dots\}$ är ortogonalt och fullständigt i rektangeln R. Detta leder till att formeln för koefficienterna blir

$$A_{mn} = \frac{\iint_R f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{2} \sin n\pi y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_R \sin^2 \frac{m\pi x}{2} \sin^2 n\pi y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\frac{1}{a}\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \int_0^a \sin n\pi y \,\mathrm{d}y}{\int_0^2 \sin^2 \frac{m\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \int_0^1 \sin^2 n\pi y\,\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{4}{a\pi^2 mn}(1 - \cos \frac{m\pi a}{2})(1 - \cos n\pi a).$$

Insättning av detta i den allmänna lösningen i a) ger svaret på b).

(Koefficienterna A_{mn} kan alternativt bestämmas genom upprepad användning av teorin för Fourierserier i en variabel.)

c) Denna fråga är relaterad till frågan huruvida Schrödingerekvationen huvudsakligen är en diffusionsekvation (med oändlig utbredningshastighet och med utjämnande verkan på initiala variationer) eller en vågekvation (med ändlig utbredningshastighet av mönster som i princip behåller sin form). Analytiskt kan Schrödingerekvation behandlas som en värmeledningsekvation med imaginär tidsaxel. Detta leder till en fundamentallösning för den aktuella Schrödingerekvationen som innehåller en Gaussklocka på formen

$$G(x, y, t) = \frac{\mu}{2\pi\hbar t} e^{-\frac{\mu(x^2+y^2)}{2i\hbar t}}$$

för $t > 0$ (och $G(x, y, t) = 0$ för $t \leq 0$).

Av ovanstående går det att dra slutsatsen, precis som för motsvarande fråga för värmeledningsekvationen, att vågfunktionen omedelbart sprider ut sig överallt. (Ej elementärt. Korrekt behandling av a) och b) på denna uppgift ger full poäng.)