Institutionen fär matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensskrivning, 2011-03-15, kl. 8.00-13.00.
SF 1648, Partiella differentialekvationer för ME och K.

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA (medhavd) samt “Formler ur Asmar” (10 sidor), som delas ut tillsammans med textlappen. (Ej räknedosa.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som bedöms med 0–X poäng, där X anges efter varje uppgifts nummer. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. (5p) En stav av längd $L = 5$ har ena änden nedsänkt i is, den andra i kokande vatten. Från början har hela staven rumstemperatur. Bestäm temperaturen $u(x,t)$ för all framtid ($t > 0$) då värmeledningsförmågan är $k = 50$ (i lämpliga enheter). Bestäm också den asymptotiska temperaturfördelningen $u(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ Det matematiska problemet preciseras enligt

$$
\begin{aligned}
\text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 50\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &&\text{för} \quad 0 < x < 5,\ t > 0,\\
\text{RV}: &\quad u(0,t) = 0, && (t > 0),\\
&\quad u(5,t) = 100 && (t > 0),\\
\text{BV}: &\quad u(x,0) = 20 && (0 < x < 5).
\end{aligned}
$$

2. (5p) Laplaceoperatorn i polära koordinater (r, φ) ges av

$$
\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},
$$

där $u = u(r, \varphi)$.

a) Bestäm (med hjälp av variabelseparation osv) den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i en godtycklig cirkelskiva $0 \le r < R$.

b) Bestäm alla lösningar till randvärdesproblemet (av “Neumanntyp”)

$$
\begin{aligned}
\text{PDE}: &\quad \Delta u = 0 \quad \text{i cirkelskivan} \ \ 0 \le r < 2,\\
\text{RV}: &\quad \frac{\partial u}{\partial r}(2,\varphi) = 8\cos^2\varphi - 4.
\end{aligned}
$$

c) Hur många lösningar finns det om randvillkoret i stället är $\frac{\partial u}{\partial r}(2,\varphi) = 8\cos^2\varphi - 5$?

3. (5p) Bestäm en lösning $u(x,t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
\text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} - (2+\cos t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 &&\text{för} \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,\\
\text{BV}: &\quad u(x,0) = e^{-4|x|} && (-\infty < x < \infty).
\end{aligned}
$$

Som ersättning för randvillkor antar vi att $u(x,t)$ är Fouriertransformerbar i x-led.

4. (6p) En hängande kedja beskrivs av systemet

$$\text{PDE}: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{för} \quad 0 < x < 9,\ t > 0,$$
$$\text{RV}: \quad u(9,t) = 0 \qquad (t > 0),$$

där x är en vertikal koordinat och $u(x,t)$ anger kedjans utböjning från lodlinjen. Vid kedjans nedre del, som svarar mot $x = 0$, antar vi bara att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} u(x,t)$ existerar och är ändligt.

a) Genomför variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ i ovanstående problem, så att du får en ekvation för X och en för T, båda innehållande en separationskonstant λ. Denna får antas ha sådant tecken att $T(t)$ inte innehåller exponentialfunktioner eller linjära funktioner.

b) Gör variabelsubstitutionen $s = 2\sqrt{x}$ i ekvationen för X och visa att resultatet blir att funktionen $y(s) = X(x)$ uppfyller en av Bessels differentialekvationer.

c) Bestäm de lösningar $y(s)$ till Bessels differentialekvation för vilka de angiva randvillkoren är uppfyllda. Detta ger också de möjliga värdena på λ.

d) Bestäm $u(x,t)$ fullständigt då det vid tid $t = 0$ gäller att

$$u(x,0) = 5J_0(\frac{\alpha_4\sqrt{x}}{3}) \qquad (0 < x < 9),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\alpha_7 J_0(\frac{\alpha_7\sqrt{x}}{3}) \quad (0 < x < 9),$$

och $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$ betecknar nollställena till Besselfunktionen J_0.

5. (4p) ("Kvantbiljard") Vågfunktionen $\psi(x,y,t)$ för en elektron som rör sig fritt i ett rektangulärt område R och som längs kanterna möts av en oändlig potentialbarriär löser den två-dimensionella Schrödingerekvationen

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}),$$

med randvillkoret att $\psi = 0$ på ∂R. Här är $\mu > 0$ elektronens massa, $\hbar > 0$ Plancks konstant och $i = \sqrt{-1}$. Vi väljer R att vara rektangeln

$$R: \quad 0 < x < 2,\ 0 < y < 1.$$

a) Genomför fullständig variabelseparation (mellan t, x och y) i ovanstående problem och skriv upp den allmänna lösningen (efter superposition).

b) Bestäm tidsutvecklingen av vågfunktionen i fallet att den initialt är koncentrerad nära ett hörn, enligt

$$\psi(x,y,0) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{för } 0 < x < a,\ 0 < y < a, \\ 0 & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

där $0 < a < 1$. (Ignorera att detta initiala ψ inte uppfyller randvillkoret.)

c) Fråga för den som får tid över: Vid tid $t = 0$ är $\psi = 0$ i t.ex. området $1 < x < 2$. Kommer samma ska att gälla vid någon tidpunkt $t > 0$, eller sprider ψ omedelbart ut sig överallt?

LYCKA TILL!