Institutionen fär matematik, KTH,
Björn Gustafsson

# Tentamensssskrivning, 2012-03-15, kl. 14.00-19.00. SF 1648, Partiella differentialekvationer.

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA (medhavd) samt "Formler ur Asmar" (10 sidor), som delas ut tillsammans med textlappen. (Ej miniräknare.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

**1.** Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för en svängande sträng av längd $L = \pi$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi,\ t > 0), \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \quad (t > 0), \\ u(x,0) &= 5\sin 3x \qquad (0 < x < \pi), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 4\sin 2x \qquad (0 < x < \pi). \end{aligned}$$

**2.** En oändligt lång stav har vid tid $t = 0$ temperaturfördelningen

$$u(x,0) = 3e^{-x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Temperaturen $u = u(x,t)$ utvecklas i tiden enligt värmeledningsekvationen

$$4\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0).$$

Bestäm $u(x,t)$ genom att Fouriertransformera i $x$-led.

**3.** Den linjära differentialekvationen

$$y'' - xy' + \lambda y = 0, \tag{1}$$

som innehåller en parameter $\lambda$, är regulär på hela den reella axeln.

a) Bestäm en lösning $y = y(x)$ genom att göra en potensserieansats kring $x = 0$. Det räcker att ta med de tre första termerna skilda från noll. (Koefficienterna kommer att bero på $\lambda$.)

b) Skriv differentialekvationen på formen

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda w(x))y = 0$$

("Sturm-Liouville-form") och identifiera de tre funktionerna $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$.

c) För vissa speciella värden på $\lambda$ blir en av lösningarna till (1) (ej nödvändigtvis den lösning du valde i a)) ett polynom. Bestäm dessa värden på $\lambda$ ("egenvärdena"). (*Ledning:* Studera rekursionsformeln för koefficienterna.)

**4.** Bestäm den elektriska potentialen $V = V(\rho, z)$ i en burk med höjd 3 cm och diameter 2 cm om mantelytan och bottenytan har potentialen 7 volt och locket har potentialen 27 volt. Randvärdesproblemet att lösa blir alltså följande, om vi använder cylinderkoordinater $(\rho, \varphi, z)$ och utnyttjar på en gång att lösningen inte kommer att bero på $\varphi$.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (0 < \rho < 1,\ 0 < z < 3),$$

$$V(1, z) = 7 \quad (0 < z < 3),$$

$$V(\rho, 0) = 7 \quad (0 < \rho < 1),$$

$$V(\rho, 3) = 27 \quad (0 < \rho < 1).$$

Utöver ovanstående kommer kravet att gränsvärdet $\lim_{\rho\to 0} V(\rho, z)$ måste vara ändligt.

**5.** Begynnelsevärdesproblemet

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \tag{2}$$

$$\psi(\theta, 0) = 1 + \cos\theta + \cos^2\theta. \tag{3}$$

beskriver, i sfäriska koordinater $(r, \theta, \varphi)$, tidsutvecklingen av vågfunktionen $\psi = \psi(\theta, t)$ för en kvantmekanisk partikel med massan $\mu > 0$, som är bunden till sfären $r = 1$ och som har initialdata som inte beror på $\varphi$ (därmed inte heller lösningen).

Bestäm lösningen $\psi = \psi(\theta, t)$ i följande steg, a)-d):

a) Utveckla funktionen
$$f(x) = 1 + x + x^2$$
i en Legendre-serie, dvs. i en serie efter basfunktionerna $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $\ldots$.

b) Gör en produktansats $\psi(\theta, t) = \Theta(\theta)T(t)$ för (2), och lös den så uppkomna differentialekvationen för $T(t)$ (med en än så länge okänd separationskonstant).

c) Gör variabelsubstitutionen $s = \cos\theta$ i den differentialekvation för $\Theta$ som du får i b), och identifiera den så erhållna differentialekvationen (för $\Theta$ som funktion av $s$) med en känd differentialekvation. Detta ger även tillåtna värden på separationskonstanten.

d) Sammanställ resultaten i b) och c) till en allmän lösning till (2), och anpassa sedan koefficienterna i denna så att lösningen till det givna begynnelsevärdesproblemet (2), (3) erhålls (resultatet i a) kan användas).

LYCKA TILL!