Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2012-06-07, SF1648, Partiella differentialekvationer.

Anm: Vissa beräkningsdetaljer har utelämnats i nedanstående lösningar. Inlämnade tentamenslösningar bör dock innehålla alla detaljer.

---

1. Origo är en regulär punkt för ekvationen, så det räcker att göra en ansats av typen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Detta ger, efter sedvanliga räkningar, rekursionsekvationen

$$a_{n+2} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

för koefficienterna ($n \geq 0$). De två första koefficientarna, a_0 och a_1, kan väljas fritt, varvid valen $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ resp. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ger två linjärt oberoende lösningar:

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 \qquad \text{(exakt)},$$

$$y_2(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{10}x^5 + \ldots .$$

Anm: Differentialekvationen är Legendres ekvation av ordning 2, och $y_1(x) = -\frac{2}{9}P_2(x)$, där P_n betecknar Legendrepolynomet av grad n.

2. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen plus randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 8\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 8k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \qquad (0 < x < 2),$$

$$X(0) = X(2) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0)=0$ ger $A=0$, och sedan $X(2)=0$ att 2λ måste vara ett nollställe till sinus (annars fås bara $X=0$ identiskt). Alltså: $2\lambda = n\pi$ $(n=1,2,\dots)$, $k=-\frac{n^2\pi^2}{4}$ och därmed

$$X(x) = B\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T: $T' + 2n^2\pi^2 T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-2n^2\pi^2 t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot Ce^{-2n^2\pi^2 t}, \qquad n=1,2,\dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-2n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t=0$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{2} = 1-\frac{x}{2} \quad (0<x<2)$$

varav

$$C_n = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \cdots = \frac{2}{n\pi}.$$

Alltså får vi svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-2n^2\pi^2 t}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

3. a) Ansatsen $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ ger

$$R''\Phi + \frac{1}{r}R'\Phi + \frac{1}{r^2}R\Phi'' = 0,$$

varav

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{konstant} = k.$$

För Φ ger detta $\Phi'' + k\Phi = 0$, men Φ ska också vara 2π-periodisk. Detta kan inte erhållas för $k<0$. Då $k=0$ fås $\Phi = a_0 + b_0\varphi$, som är 2π-periodisk om och endast om $b_0 = 0$, och för $k>0$ fås 2π-periodiska lösningar exakt för värdena $k=n^2$, n heltal, specifikt

$$\Phi(\varphi) = a_n\cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \quad (n=1,2,\dots).$$

Sammanfattningsvis är $k=n^2$, $n=0,1,2,\dots$ de enda möjliga värdena på k (egenvärdena).

För R har vi nu ekvationen

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0,$$

som är av Eulertyp. Ansatsen $R = r^\alpha$ (eller en motsvarande fullständig potenesserieansats) eller substitutionen $r = e^t$ ger allmänna lösningen

$$R = Ar^n + Br^{-n}.$$

Här måste $B = 0$, annars får vi en singularitet i origo. Tillsammans med φ-delen och superposition får vi därmed allmänna lösningen

$$u(r,\varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

b) Sätter vi in $r = 2$ ovan och jämför med den givna randfunktionen får vi problemet att bestämma koefficienterna a_n, b_n så att

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 2 - 4\cos^2\varphi + 24 \sin 3\varphi = -2\cos 2\varphi + 24 \sin 3\varphi.$$

Detta ger $a_2 = -1$, $b_3 = 3$, övriga koefficienter $= 0$, och därmed svaret

$$u(r,\varphi) = -r^2 \cos 2\varphi + 3r^3 \sin 3\varphi.$$

4. Vi Laplacetransformerar i t-led, och sätter

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st}\, dt.$$

Differentialekvationen inklusive begynnelsevillkor blir

$$s^2 \cdot U(x,s) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{6}{s^2},$$

eller

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - s^2 \cdot U(x,s) = -\frac{6}{s^2}.$$

Detta är en inhomogen linjär differentialtialekvation med konstanta koefficienter med x som oberoende variabel. Den "homogena lösningen" är $U_{hom} = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx}$, och en partikulär lösning är $U_{part} = 6/s^4$. Den fullständiga lösningen är därmed

$$U(x,s) = A(s)e^{sx} + B(s)e^{-sx} + \frac{6}{s^4}.$$

Antagandet att $u(x,t)$ är begränsad då $x \to \infty$ leder till slutsatsen att $A(s) = 0$ för alla s. Det återstående randvillkoret ger sedan $U(x,s) = 0$, varav $B(s) = -6/s^4$. Alltså har vi

$$U(x,s) = -\frac{6}{s^4} \cdot e^{-sx} + \frac{6}{s^4}.$$

Eftersom $\frac{6}{s^4} = \mathcal{L}(t^3)$ ger inverstransformering av ovanstående lösningen

$$u(x,t) = t^3 - (t-x)^3 H(t-x) = \begin{cases} t^3 & \text{då} \quad t < x, \\ t^3 - (t-x)^3 & \text{då} \quad t > x. \end{cases}$$

5. Här gör man variabelseparation som vanligt, t.ex.

$$\psi(x,t) = X(x)T(t),$$

för differentialekvationen och randvillkoren. Detta ger

$$i\hbar\frac{T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{X''}{X} = k,$$

där k är konstant. Ekvationen för X blir

$$X'' + \frac{2\mu k}{\hbar^2}X = 0.$$

Det följer att k måste vara positiv, närmare bestämt

$$k = \hbar^2 n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

med tanke på aktuellt värde på μ och på randvillkor. Detta ger efter lösning av T-ekvationen och superposition

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-i\hbar n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Till slut har vi begynnelsevillkoret att ta hänsyn till. Vi har då att bestämma koefficienterna B_n så att

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2} = 3\cos\frac{\pi x}{4} \quad (0 < x < 2).$$

Detta ger på vanligt vis (sinusserie)

$$B_n = \frac{2}{2}\int_0^2 3\cos\frac{\pi x}{4}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \cdots = \frac{12}{\pi(4n^2-1)}.$$

Därmed blir svaret på uppgiften

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi(4n^2-1)}\, e^{-i\hbar n^2\pi^2 t} \sin\frac{n\pi x}{2}.$$