Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamenssskrivning, 2012-06-07, kl. 8.00-13.00. SF 1648, Partiella differentialekvationer.

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA (medhavd) samt “Formler ur Asmar” (10 sidor), som delas ut tillsammans med textlappen. (Ej miniräknare.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen
$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$$
på intervallet $-1<x<1$ genom att göra en potensserieansats kring $x=0$. Det räcker att ta med de tre första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

2. Bestäm lösningen $u=u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för värmeledningsekvationen i en rumsdimension:
$$\begin{aligned} \text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t}=8\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{för} \quad 0<x<2,\ t>0,\\ \text{RV}: &\quad u(0,t)=u(2,t)=0 && (t>0),\\ \text{BV}: &\quad u(x,0)=1-\frac{x}{2} && (0<x<2). \end{aligned}$$

3. a) Laplaceoperatorn i polära koordinater (r,φ) ges av
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$
där $u=u(r,\varphi)$. Bestäm den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta u=0$ i en godtycklig cirkelskiva med centrum i origo (dvs. för $0\le r\le a$, $a>0$). Det krävs att variabelseparation i polära koordinater genomförs i detalj.

   b) Lös Dirichletproblemet
$$\begin{cases} \Delta u=0 & \text{i cirkelskivan} \quad 0\le r\le 2,\\ u(2,\varphi)=2-4\cos^2\varphi+24\sin 3\varphi. \end{cases}$$

4. Bestäm en lösning $u=u(x,t)$ i kvartsplanet $x>0$, $t>0$ till följande rand- och begynnelsevärden för en inhomogen vågekvation:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6t & (x>0,\ t>0),\\ u(0,t)=0 & (t>0),\\ u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 & (x>0). \end{cases}$$
För att göra lösningen entydigt bestämd kräver vi att $u(x,t)$ ska vara begränsad då $x\to+\infty$ (för varje fixt värde på $t>0$).

   Ledning: Laplacetransformera i t-led.

5. Vågfunktionen $\psi(x,t)$ för en elektron som rör sig fritt inom ett intervall $0 < x < L$, och i ändpunkterna av detta möter en oändlig potentialbarriär, uppfyller den ett-dimensionella Schrödingerekvationen

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L,\ t > 0)$$

med randvillkoren

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \qquad (t > 0).$$

Här är $\mu > 0$ elektronens massa, $\hbar > 0$ Plancks konstant och $i = \sqrt{-1}$.

Antag att L och μ i lämpligt valda enheter har värdena

$$L = 2, \quad \mu = \frac{1}{8},$$

medan Plancks konstant fortfarande får heta $\hbar$ i dessa enheter. Bestäm tidsutvecklingen av vågfunktionen då denna ges initialt av

$$\psi(x,0) = 3\cos\frac{\pi x}{4}.$$

LYCKA TILL!