Institutionen för matematik
KTH
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1, 12 januari 2004

1) Antag först att A är kung. Det är då sant som hon säger att B inte är kung, så B måste i det fallet vara narr och skulle (lögnaktigt) förneka att A är kung. A ljuger alltså om B:s svar och kan inte vara kung. Motsägelse, så **A är narr**.
Hon ljuger alltså när hon säger att B inte är kung, så **B är kung**. (B skulle alltså sanningsenligt svara ”nej” på frågan om A är kung. A ljuger och säger att han skulle svara ”ja”. Det stämmer, så det funna är verkligen en lösning till problemet.)
Svar: A är narr och B är kung.
Formellt, om man låter A betyda ”A är kung” och B betyda ”B är kung”, får man att $A \leftrightarrow \sim B$ och $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ är sanna. Den första ger att $B \leftrightarrow A$ är falsk, så enligt den andra är A falsk och därmed enligt den första B sann.

2) Att visa: $(A \,\&\, \sim B) \rightarrow (\sim C \rightarrow (A \rightarrow B)) \;\vdash\; A \rightarrow (B \vee C)$.
Idé: Om vi antar A och $\sim B$ och $\sim C$ får vi enligt premissen $A \rightarrow B$, så B. Motsägelse, så om A gäller måste minst en av B och C gälla.

1	(1)	$(A \,\&\, \sim B) \rightarrow (\sim C \rightarrow (A \rightarrow B))$	premiss	
2	(2)	A	antagande	
3	(3)	$\sim B \,\&\, \sim C$	antagande	
3	(4)	$\sim B$	3	&E
2,3	(5)	$A \,\&\, \sim B$	2,4	&I
1,2,3	(6)	$\sim C \rightarrow (A \rightarrow B)$	1,5	→E
3	(7)	$\sim C$	3	&E
1,2,3	(8)	$A \rightarrow B$	6,7	→E
1,2,3	(9)	B	8,2	→E
1,2,3	(10)	$\curlywedge$	4,9	~E
1,2	(11)	$\sim(\sim B \,\&\, \sim C)$	3,10	~I
1,2	(12)	$B \vee C$	11	SI(DeM$_4$)
1	(13)	$A \rightarrow (B \vee C)$	2,12	→I

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), så **härledningen är klar**.

3) Vi skall visa att $\forall x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy),\ \exists x\, \forall y\, (Fx \rightarrow Gy) \;\nvDash\; \forall x \sim Fx \vee \forall x\, Gx$.
Påståendet visas av en tolkning som gör de vänstra sentenserna sanna och den högra falsk, dvs både $\forall x \sim Fx$ och $\forall x\, Gx$ falska. För att $\forall x \sim Fx$ skall vara falsk, skall $\text{Ext}(F) \neq \varnothing$ och den första sentensen blir sann precis om också $\text{Ext}(G) \neq \varnothing$. För att $\forall x\, Gx$ skall vara falsk, skall $\text{Ext}(G) \neq D$ och den andra sentensen blir sann precis om det finns ett element som inte ligger i $\text{Ext}(F)$, dvs om också $\text{Ext}(F) \neq D$. Tydligen fungerar tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \text{Ext}(F) = \text{Ext}(G) = \{\alpha\}$, ty då är
$\forall x\, \exists y\, (Fx \rightarrow Gy)$ **sann**, ty $\exists y\, (Fa \rightarrow Gy)$ och $\exists y\, (Fb \rightarrow Gy)$ båda sanna,
ty $Fa \rightarrow Ga$ och $Fb \rightarrow Ga$ sanna, ty Ga sann, (ty $\alpha \in \text{Ext}(G)$).
$\exists x\, \forall y\, (Fx \rightarrow Gy)$ **sann**, ty $\forall y\, (Fb \rightarrow Gy)$ sann,
ty $Fb \rightarrow Ga$ och $Fb \rightarrow Gb$ sanna, ty Fb falsk, (ty $\beta \notin \text{Ext}(F)$).
$\forall x \sim Fx \vee \forall x\, Gx$ **falsk**, ty $\forall x \sim Fx$ och $\forall x\, Gx$ båda falska,
ty $\sim Fa$ och Gb båda falska, ty Fa sann och Gb falsk (ty $\alpha \in \text{Ext}(F)$ och $\beta \notin \text{Ext}(G)$).
Saken är klar.

4) Att visa: $\sim \forall x\, (Fx \rightarrow Gx) \;\vdash\; \exists x \sim Gx$.
Idé: Om Ga gäller för alla a, gäller också $Fa \rightarrow Ga$ för alla a. Det motsäger premissen.

1	(1)	$\sim \forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, Gx$	antagande		
2	(3)	Ga	2	∀E	
2	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	3	SI(PMI$_1$)	
2	(5)	$\forall x\, (Fx \rightarrow Gx)$	4	∀I	[a inte i (2)]
1,2	(6)	$\curlywedge$	1,5	~E	
1	(7)	$\sim \forall x\, Gx$	2,6	~I	
1	(8)	$\exists x \sim Gx$	7	SI(QS$_1$)	

Slutsatsen på rad (8) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

4 alt) Eftersom härledningen blev så kort tar vi en till, en ännu kortare.

Idé: Premissen innebär att $\sim(Fa\to Ga)$ gäller för något a. Då måste $\sim Ga$ gälla för detta a.

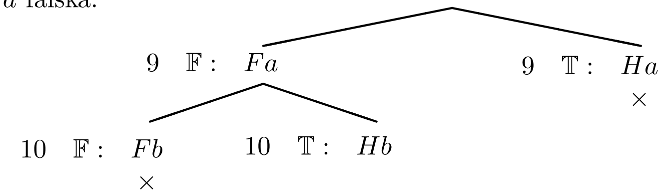
1	(1)	$\sim\forall x\,(Fx\to Gx)$	premiss		
1	(2)	$\exists x\sim(Fx\to Gx)$	1	SI(QS$_1$)	
3	(3)	$\sim(Fa\to Ga)$	antagande		
3	(4)	$Fa\,\&\sim Ga$	3	SI(Neg-Imp)	
3	(5)	$\sim Ga$	4	&E	
3	(6)	$\exists x\sim Gx$	5	$\exists$I	
1	(7)	$\exists x\sim Gx$	2,3,6	$\exists$E	[a inte i (2),(6)]

Slutsatsen på rad (7) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

5) För att avgöra om
$\forall x\,(Fx\to Hx),\ \exists x\,(Gx\,\&\sim Hx)\ \models\ \sim\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$
söker vi motexempel (tolkningar som gör premisserna sanna och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna enligt:
1. Satslogiska 1; 6,7,8,9,10
2. $\mathbb{T}\exists,\mathbb{F}\forall$ 2,3
3. $\mathbb{T}\forall,\mathbb{F}\exists$ 4,5

	$\mathbb{T}$:	$\forall x\,(Fx\to Hx)$	a_4, b_5
	$\mathbb{T}$:	$\exists x\,(Gx\,\&\sim Hx)$	$\surd_{2:a}$
	$\mathbb{F}$:	$\sim\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$	$\surd_{1}$
1	$\mathbb{T}$:	$\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$	$\surd_{3:b}$
2	$\mathbb{T}$:	$Ga\,\&\sim Ha$	$\surd_{6}$
3	$\mathbb{T}$:	$Fb\,\&\,Gb$	$\surd_{7}$
4	$\mathbb{T}$:	$Fa\to Ha$	$\surd_{9}$
5	$\mathbb{T}$:	$Fb\to Hb$	$\surd_{10}$
6	$\mathbb{T}$:	Ga	
6	$\mathbb{T}$:	$\sim Ha$	$\surd_{8}$
7	$\mathbb{T}$:	Fb	
7	$\mathbb{T}$:	Gb	
8	$\mathbb{F}$:	Ha	



Tablån sluter sig inte, så **slutledningen är inte giltig**. Ett **motexempel** fås ur den öppna stigen med två individer a, b och Fb, Ga, Gb, Hb sanna och Fa, Ha falska:
$D = \{\alpha,\beta\}$,
$\mathrm{Ext}(F) = \mathrm{Ext}(H) = \{\beta\}$,
$\mathrm{Ext}(G) = D$.

6) 1. ”Var och en är precis endera av kung och narr.”
dvs ”För alla x : (x är kung eller x är narr) och inte (x är kung och x är narr)”
så **svar**: $\forall x\,((Kx\vee Nx)\,\&\sim(Kx\,\&\,Nx))$
(Alternativ: $\forall x\,((Kx\,\&\sim Nx)\vee(\sim Kx\,\&\,Nx))$, $\forall x\,(Kx\leftrightarrow\sim Nx)$ m.fl.)
2. ”Det finns en kung som tycker om dels alla andra kungar och dels minst två narrar.”
dvs ”Det finns x så att x är kung och (för alla y : om y är kung och inte är x så tycker x om y) och (det finns y och z så att y och z är narrar och y inte är z och x tycker om y och x tycker om z)”, så **svar**:
$\exists x\,(Kx\,\&\,(\forall y\,((Ky\,\&\,y\neq x)\to Txy)\,\&\,\exists y\,\exists z\,(((Ny\,\&\,Nz)\,\&\,y\neq z)\,\&\,(Txy\,\&\,Txz))))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

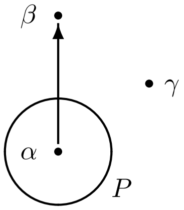
7) Att visa: $\forall x\,\exists y\,((Fx\to Gy)\,\&\,Fy)\ \vdash\ \exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$.

Idé: Enligt premissen finns för alla a ett b så att $(Fa\to Gb)\,\&\,Fb$ och därmed Fb gäller. Enligt premissen igen, finns för b ett c, så att $(Fb\to Gc)\,\&\,Fc$ och därmed $Fb\to Gc$ (vilket ger Gc eftersom Fb gäller) och Fc gäller. Således fås $Fc\,\&\,Gc$.

1	(1)	$\forall x\,\exists y\,((Fx\to Gy)\,\&\,Fy)$	premiss		
1	(2)	$\exists y\,((Fa\to Gy)\,\&\,Fy)$	1	$\forall$E	
3	(3)	$(Fa\to Gb)\,\&\,Fb$	antagande		
3	(4)	Fb	3	&E	
1	(5)	$\exists y\,((Fb\to Gy)\,\&\,Fy)$	1	$\forall$E	
6	(6)	$(Fb\to Gc)\,\&\,Fc$	antagande		
6	(7)	$Fb\to Gc$	6	&E	
3,6	(8)	Gc	7,4	$\to$E	
6	(9)	Fc	6	&E	
3,6	(10)	$Fc\,\&\,Gc$	9,8	&I	
3,6	(11)	$\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$	10	$\exists$I	
1,3	(12)	$\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$	5,6,11	$\exists$E	[c inte i (5),(11),(3)]
1	(13)	$\exists x\,(Fx\,\&\,Gx)$	2,3,12	$\exists$E	[b inte i (2),(12),(1)]

Slutsatsen på rad (13) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

8) Vi skall avgöra om
$\forall x\,(Px \to \exists y\,(\sim Py \,\&\, \forall z\,(Rxz \leftrightarrow y = z))),\ \exists x\,Px\ \vDash\ \forall x\,(Px \vee \exists y\,Ryx)$.
Premiss 1 säger att det från varje P-element går precis en pil och att den går till ett icke$P$-element. Premiss 2 säger att det finns minst ett P-element. Men härur följer **inte** att varje element antingen är ett P-element eller har en pil till sig, dvs att det går minst en pil till varje icke$P$-element (den tänkta slutsatsen), se fig. Så
Svar: slutledningen är inte korrekt, ett motexempel:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad \mathrm{Ext}(P) = \{\alpha\}, \quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$



9) Vi har: $\alpha)\ p \vDash \sim q$ och $\beta)\ q \nvDash p$.
$\alpha)$ betyder att $\sim q$ är sann, dvs q falsk, i alla tolkningar som gör p sann. Det är detsamma som att p är falsk i alla tolkningar som gör q sann.
$\beta)$ betyder att det finns minst en tolkning som gör q sann och p falsk.
Vi ser att $\alpha) \nRightarrow \beta)$. Om det nämligen inte finns någon tolkning som gör q sann är $\alpha)$ uppfylld men inte $\beta)$. Ett motexempel ges alltså av $q : A \,\&\, \sim A$ (dvs $\curlywedge$) och p godtycklig.
Dessutom har vi $\beta) \nRightarrow \alpha)$, ty om det finns en tolkning som gör q sann och p falsk är $\beta)$ uppfylld. Om det dessutom finns en tolkning som gör q sann och p sann är $\alpha)$ inte uppfylld. Ett motexempel ges alltså av $q : A$ och $p : B$ (eller $q : \sim\curlywedge$ och $p : A$).
Så **svar: Varken** $\alpha) \Rightarrow \beta)$ **eller** $\beta) \Rightarrow \alpha)$ **gäller**.

10) Låt ϕy vara formeln $S(c) + y = S(c + y)$. Vi skall som i ledningen först visa $\forall y\,\phi y$.
Man får $S(c) + 0 \overset{\mathrm{P3}}{=} S(c) \overset{\mathrm{P3}}{=} S(c + 0)$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $S(c) + a = S(c + a)$.
Då gäller $S(c) + S(a) \overset{\mathrm{P4}}{=} S(S(c) + a) \overset{\phi a}{=} S(S(c + a)) \overset{\mathrm{P4}}{=} S(c + S(a))$, dvs $\phi S(a)$. För godtyckligt a gäller alltså $\phi a \to \phi S(a)$ och därmed $\forall y\,(\phi y \to \phi S(y))$.
Så $\phi 0$ & $\forall y\,(\phi y \to \phi S(y))$ gäller och enligt (den alfabetiska varianten med y i stället för x av) axiom P7 (med $n = 0$) $\forall y\,\phi y$, dvs $\forall y\,S(c) + y = S(c + y)$ för godtyckligt c.
Således ($\forall$I) fås det önskade $\forall x\,\forall y\,S(x) + y = S(x + y)$. **Saken är klar**.

11) Vi skall visa att $A \,\&\, B,\ \Diamond\,(\Diamond B \to \sim A)\ \vdash_{S5}\ \sim\Box\,A \,\&\, \sim\Box\sim A$.
Idé: Enligt premiss 1 gäller A i den verkliga världen, så $\sim A$ gäller inte i alla världar, så $\sim\Box\sim A$ gäller. Dessutom gäller B i den verkliga världen, så $\Diamond B$ gäller i alla världar. Enligt premiss 2 gäller $\Diamond B \to \sim A$ i någon värld. Där fås $\sim A$, så $\sim\Box A$.

1	(1)	$A \,\&\, B$	premiss		
2	(2)	$\Diamond\,(\Diamond B \to \sim A)$	premiss		
3	(3)	$\Box \sim A$	antagande		
3	(4)	$\sim A$	3	$\Box$E	
1	(5)	A	1	&E	
1,3	(6)	$\curlywedge$	4,5	∼E	
1	(7)	$\sim\Box\sim A$	3,6	∼I	
8	(8)	$\Box A$	antagande		
9	(9)	$\Diamond B \to \sim A$	antagande		
10	(10)	$\Diamond B$	antagande		
9,10	(11)	$\sim A$	9,10	→E	
8	(12)	A	8	$\Box$E	
8,9,10	(13)	$\curlywedge$	11,12	∼E	
9,10	(14)	$\sim\Box A$	8,13	∼I	
9	(15)	$\Diamond B \to \sim\Box A$	10,14	→I	
2	(16)	$\Diamond B \to \sim\Box A$	2,9,15	$\Diamond$E	[(15) fullt modaliserad]
1	(17)	B	1	&E	
1	(18)	$\Diamond B$	17	$\Diamond$I	
1,2	(19)	$\sim\Box A$	16,18	→E	
1,2	(20)	$\sim\Box A \,\&\, \sim\Box \sim A$	19,7	&I	

Eftersom slutsatsen på sista raden bara beror av premisserna på raderna (1) och (2), är **härledningen klar**. Antagandet på rad (10) av $\Diamond B$, som vi sedan visar på rad (18), behövs för att slutsatsen vid $\Diamond$E:en inte får bero av den inte fullt modaliserade rad (1).

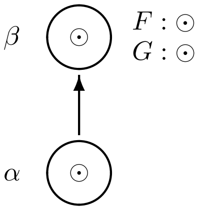
12) Vi skall visa att $\Box\,(A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx)\ \nvDash_{S5}\ \forall x\,(\Diamond A\rightarrow\Diamond Fx)$.
Det gör vi genom att finna en tolkning som gör vänstra sentensen sann och den högra falsk.
Att den högra sentensen är falsk betyder att det i w^*, den verkliga världen, finns ett a så att $\Diamond Fa$ är falsk, medan $\Diamond A$ är sann (dvs A är sann i någon värld).
Att den vänstra sentensen är sann betyder att $A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx$ är sann i alla världar, speciellt där A är sann, så $\Diamond\,\forall x\,Fx$ är sann där och alltså i alla världar.
En tolkning som visar påståendet ges alltså av:
$\mathcal{W}=\{w^*,u\},\ D=\{\alpha\},\quad w^*(D)=D,\ u(D)=\varnothing, w^*[A]=u[A]=1,\ w^*[F]=u[F]=\varnothing.$
I den tolkningen gäller nämligen att

- $\Box\,(A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx)$ är **sann**, ty $w^*[\Box\,(A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx)]=1$,
  ty $w^*[A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx]=u[A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx]=1$,
  ty $w^*[\Diamond\,\forall x\,Fx]=u[\Diamond\,\forall x\,Fx]=1$, ty $u[\forall x\,Fx]=1$ (ty $u(D)=\varnothing$!)
- $\forall x\,(\Diamond A\rightarrow\Diamond Fx)$ är **falsk**, ty $w^*[\forall x\,(\Diamond A\rightarrow\Diamond Fx)]=0$,
  ty ($\alpha\in w^*(D)$ och) $w^*[\Diamond A\rightarrow\Diamond Fa]=0$,
  ty $w^*[\Diamond A]=1$ (ty $w^*[A]=1$)
  och $w^*[\Diamond Fa]=0$ (ty $w^*[Fa]=u[Fa]=0$, ty $\alpha\notin w^*[F]$, $\alpha\notin u[F]$)

Så **saken är klar**, vi har visat att $\quad\Box\,(A\rightarrow\Diamond\,\forall x\,Fx)\ \nvDash_{S5}\ \forall x\,(\Diamond A\rightarrow\Diamond Fx)$.

13) Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha\Vdash A\rightarrow B$, dvs för alla $\tau\in S$ gäller att om $\tau\Vdash A$ så gäller också $\tau\Vdash B$. Vi skall visa att då $\alpha\Vdash{\sim}B\rightarrow{\sim}A$.
Antag att $\sigma\in S$ uppfyller $\sigma\Vdash{\sim}B$. För alla $\tau\in S$ med $\sigma\leq\tau$ gäller då $\tau\nVdash B$, men därmed fås att $\tau\nVdash A$ (annars skulle ju enligt ovan $\tau\Vdash B$). Det betyder att $\sigma\Vdash{\sim}A$. Eftersom detta gäller för alla $\sigma\in S$, får vi att $\alpha\Vdash{\sim}B\rightarrow{\sim}A$.
Så om $\alpha\Vdash A\rightarrow B$ så $\alpha\Vdash{\sim}B\rightarrow{\sim}A$, dvs vi har visat $A\rightarrow B\ \vDash_I{\sim}B\rightarrow{\sim}A$, **saken är klar**.

14) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx\rightarrow Gx)\ \nvDash_I\ {\sim}\,\exists x\,Fx\vee\exists x\,Gx$ genom att finna en tolkning $\mathcal{K}$ som bestyrker $\forall x\,(Fx\rightarrow Gx)$ (dvs sådan att $\sigma\Vdash F\circledcirc\rightarrow G\circledcirc$ för alla $\sigma\in S$ och alla $\circledcirc\in dom(\sigma)$) och inte bestyrker ${\sim}\,\exists x\,Fx\vee\exists x\,Gx$ (dvs varken bestyrker ${\sim}\,\exists x\,Fx$ eller $\exists x\,Gx$).
Betrakta tolkningen (se fig.) $S=\{\alpha,\beta\}$, $\leqslant=\{\langle\alpha,\beta\rangle\}$,
$dom(\alpha)=dom(\beta)=\{\odot\}$,
$warr(\alpha)=\varnothing$, $warr(\beta)=\{\langle\text{‘}F\text{’},\odot\rangle,\langle\text{‘}G\text{’},\odot\rangle\}$.
Den ger:



- $\alpha\ \Vdash\ \forall x\,(Fx\rightarrow Gx)$,
  ty $\alpha\ \Vdash\ F\odot\rightarrow G\odot$ och $\beta\ \Vdash\ F\odot\rightarrow G\odot$, ty $\alpha\ \nVdash\ F\odot$ och $\beta\ \Vdash\ G\odot$
- $\alpha\ \nVdash{\sim}\exists x\,Fx\vee\exists x\,Gx$,
  ty $\alpha\ \nVdash{\sim}\exists x\,Fx$ (ty $\beta\ \Vdash\ \exists x\,Fx$, ty $\beta\Vdash F\odot$) och $\alpha\ \nVdash\ \exists x\,Gx$ (ty $\alpha\nVdash G\odot$)

Så **saken är klar**.

15) Beviset är som i ”Tillämpning 2” i kompletteringsmaterial K2 till kursen.
Låt Δ vara den givna sentensmängden $\mathcal{T}_{AR}\cup\{c\neq 0\}\cup\{\exists x\,\underline{n}*x=c\mid n=1,2,\dots\}$ och Δ' en ändlig delmängd till Δ. Då har Δ' en modell. Man kan ju nämligen ta standardmodellen (så att alla sentenser i $\mathcal{T}_{AR}$ är sanna), kompletterad med att c tolkas som produkten av alla de (ändligt många) n för vilka sentensen $\exists x\,\underline{n}*x=c$ ingår i Δ' ($c=1$ om inga sådana sentenser ingår). Alla sentenser i Δ' är sanna i denna tolkning, så den är en modell för Δ'. Eftersom varje ändlig delmängd till Δ har en modell, ger kompakthetssatsen att hela Δ har en modell. **Saken är klar**.

16) Den givna sentensen $\quad\forall u\,\forall X\,\exists v\,\forall x\,\forall y\,({\sim}\,Xx\vee Xv(u(y)))\quad$ är sann precis om det för varje val av $\mathrm{Ref}(f):D\rightarrow D$ och $\mathrm{Ext}(P)\subseteq D$ finns $\mathrm{Ref}(g):D\rightarrow D$ så att $\forall x\,\forall y\,({\sim}\,Px\vee Pg(f(y)))$ blir sann. Ett sådant Ref g finns (för alla domäner D), ty om $\mathrm{Ext}(P)=\varnothing$ är ${\sim}Px$ sann för alla x och annars kan man som $\mathrm{Ref}(g)$ ta funktionen som tar alla element i D till ett visst element i $\mathrm{Ext}(P)$, då blir $Pg(f(y))$ sann för alla y. Eftersom sentensen är sann i alla tolkningar fås **svaret: Sentensen är en tautologi**.