Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Måndagen den 12 januari 2004

Skrivtid: 8.00 – 13.00
Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Den som vårterminen 2003 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) stöter vi på öborna A och B.
Då vi frågar A om B är kung, svarar hon ”nej”. Sedan påstår hon att om vi skulle fråga B om A är kung, skulle han svara ”ja”.
Vad kan man av detta sluta sig till, är A kung eller narr, är B kung eller narr?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) att

$$(A \,\&\, {\sim} B) \to ({\sim} C \to (A \to B)) \;\vdash\; A \to (B \vee C).$$

3) Visa att

$$\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy),\; \exists x\, \forall y\, (Fx \to Gy) \;\not\models\; \forall x {\sim} Fx \vee \forall x\, Gx.$$

4) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$${\sim}\forall x\, (Fx \to Gx) \;\vdash\; \exists x {\sim} Gx.$$

5) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, (Fx \to Hx),\; \exists x\, (Gx \,\&\, {\sim} Hx) \models {\sim}\exists x\, (Fx \,\&\, Gx).$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

6) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Var och en är precis endera av kung och narr.”
2. ”Det finns en kung som tycker om dels alla andra kungar och dels minst två narrar.”
Använd följande lexikon:
Kx : ”Ref(x) är kung”, Nx : ”Ref(x) är narr”,
Txy : ”Ref(x) tycker om Ref(y)”.

7) Visa med naturlig deduktion:

$$\forall x\, \exists y\, ((Fx \to Gy) \,\&\, Fy) \;\vdash\; \exists x\, (Fx \,\&\, Gx).$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

Vänd!

8) Är följande slutledning korrekt? Visa det med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) **eller** finn en tolkning som visar motsatsen.

$$\forall x\,(Px \rightarrow \exists y\,(\sim Py \,\&\, \forall z\,(Rxz \leftrightarrow y = z))),\ \exists x\, Px\ \vDash\ \forall x\,(Px \vee \exists y\, Ryx)$$

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p, q:

$$\alpha)\ \ p \vDash \sim q \qquad \beta)\ \ q\ \nvDash\ p$$

α) säger alltså att $\sim q$ är en logisk följd av p, medan β) säger att p inte är en logisk följd av q.
Gäller $\alpha)\ \Rightarrow\ \beta)$? Gäller $\beta)\ \Rightarrow\ \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\,\forall y\, S(x) + y = S(x + y)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Ledning: Visa först $\forall y\, S(c) + y = S(c + y)$ för godtyckligt c.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$A \,\&\, B,\ \Diamond\,(\Diamond B \rightarrow \sim A)\ \vdash_{S5} \sim\Box\, A \,\&\, \sim\Box\sim A.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\,(A \rightarrow \Diamond\,\forall x\, Fx)\ \nvDash_{S5}\ \forall x\,(\Diamond A \rightarrow \Diamond Fx).$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \rightarrow B\ \vDash_I \sim B \rightarrow \sim A.$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\ \nvDash_I \sim\exists x\, Fx \vee \exists x\, Gx.$$

15) Låt $\mathcal{T}_{AR}$ vara mängden av alla de sentenser i första ordningens predikatlogik med aritmetikens språk (dvs med $0, S, +, *$ som i Peanos axiom) som är sanna i standardmodellen (den med domän $\mathbb{N}$).
Visa att det finns en modell (i språket med $0, S, +, *, c$) för $\mathcal{T}_{AR} \cup \{c \neq 0\} \cup \{\exists x\, \underline{n} * x = c \mid n = 1, 2, \dots\}$. ($\underline{n}$ står för $S(S(\dots S(0)\dots))$, n st 'S'.)
Ref(c) är då ett "tal" ($\neq 0$) som är delbart med **alla** naturliga tal (utom 0).

16) Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\forall u\,\forall X\,\exists v\,\forall x\,\forall y\,(\sim Xx \vee Xv(u(y)))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.