Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1 och IT2, 17 augusti 2004

1) Vi har påståendena: A: ”B och C är kungar”, B: ”A är narr och C är kung.”
Om A är kung är det han säger sant, så B är en kung som ljuger (A är ju kung). Omöjligt, så A är inte kung, d.v.s. **A är narr** och ljuger alltså, så minst en av B och C är också narr. Om B är kung måste C alltså vara narr, men B (som skulle vara kung) påstår att C är kung. Omöjligt, så **B är narr**.
Eftersom B:s påstående är lögnaktigt och A är narr, måste det vara falskt att C är kung, så **C är också narr**.
Svar: A, B och C är alla tre narrar.
Formellt, om man låter A, B, C betyda ”A, B resp. C är kung”, får man att $A \leftrightarrow (B \,\&\, C)$ och $B \leftrightarrow (\sim A \,\&\, C)$ är sanna. T.ex. sanningsvärdestabell ger att A, B, C alla är falska.

2) Att visa: $A \vee B \;\vdash\; A \vee (B \,\&\, \sim A)$.
Vi ger några alternativa härledningar. Kortast blir:

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
	(2)	$A \vee \sim A$		SI(LEM)
1	(3)	$(A \vee B) \,\&\, (A \vee \sim A)$	1,2	& I
1	(4)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	3	SI(Dist)

Två andra, längre, möjligheter:

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \vee (B \,\&\, \sim A))$	antagande	
3	(3)	A	antagande	
3	(4)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	3	$\vee$I
2,3	(5)	$\curlywedge$	2,4	~E
2	(6)	$\sim A$	3,5	~I
1,2	(7)	B	1,6	SI(DS)
1,2	(8)	$B \,\&\, \sim A$	7,6	& I
1,2	(9)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	8	$\vee$I
1,2	(10)	$\curlywedge$	2,9	~E
1	(11)	$\sim\sim(A \vee (B \,\&\, \sim A))$	2,10	~I
1	(12)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	11	DN

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
	(2)	$A \vee \sim A$		SI(LEM)
3	(3)	A	antagande	
3	(4)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	3	$\vee$I
5	(5)	B	antagande	
6	(6)	$\sim A$	antagande	
5,6	(7)	$B \,\&\, \sim A$	5,6	& I
5,6	(8)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	7	$\vee$I
5	(9)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	2,3,4,6,8	$\vee$E
1	(10)	$A \vee (B \,\&\, \sim A)$	1,3,4,5,9	$\vee$E

Slutsatsen på sista raden beror bara av premissen på rad (1), så **härledningarna är klara**.

3) Att visa: $\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy) \;\vdash\; \exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, Fx$.
Idé: Om $\exists x\, Fx$, gäller Fa för något a. Enligt premissen fås Fb för godtyckligt b, så $\forall x\, Fx$.

1	(1)	$\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, Fx$	antagande		
3	(3)	Fa	antagande		
1	(4)	$\forall y\, (Fa \rightarrow Fy)$	1	$\forall$E	
1	(5)	$Fa \rightarrow Fb$	4	$\forall$E	
1,3	(6)	Fb	5,3	$\rightarrow$E	
1,3	(7)	$\forall x\, Fx$	6	$\forall$I	[b inte i (1),(3)]
1,2	(8)	$\forall x\, Fx$	2,3,7	$\exists$E	[a inte i (2),(7),(1)]
1	(9)	$\exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, Fx$	2,8	$\rightarrow$I	

Slutsatsen på rad (9) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

4) Se nästa sida.

5) 1. ”Om någon hälsar på Pelle, så finns det någon som inte är oartig mot Pelle.”
dvs ”Om det finns x så att x hälsar på p, så finns det y så att y inte är oartig mot p”,
så **svar**: $\exists x\, Hxp \rightarrow \exists y \sim Oyp$ ($\exists x\, Hxp \rightarrow \exists x \sim Oxp$ går lika bra.)
2. ”Om någon hälsar på någon och denne inte hälsar tillbaka, så är den senare oartig mot den förra.”
dvs ”För alla x och alla y: Om x hälsar på y och y inte hälsar på x, så är y oartig mot x”
så **svar**: $\forall x \forall y\, ((Hxy \,\&\, \sim Hyx) \rightarrow Oyx)$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

4) Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \to \exists y\, Gy),\ \forall x\,(Gx \to Hx)\ \nvDash\ \forall x\,(Fx \to Hx)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör de vänstra sentenserna sanna och den högra falsk. För att $\forall x\,(Fx \to Hx)$ skall vara falsk, måste det finnas ett element, α säg, med Fa sann och Ha falsk. Premiss 1 (med $x = a$) ger då att $\exists y\, Gy$ är sann, medan premiss 2 ger att Ga är falsk. Det krävs ett element till i domänen, kalla det β, med Gb (och då också Hb) sann.
Vi ser att tolkningen $\quad D = \{\alpha, \beta\}, \quad \mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}, \quad \mathrm{Ext}(G) = \mathrm{Ext}(H) = \{\beta\} \quad$ gör:

- $\forall x\,(Fx \to \exists y\, Gy)$ **sann**, ty $Fa \to \exists y\, Gy$ och $Fb \to \exists y\, Gy$ båda sanna, ty $\exists y\, Gy$ är sann, ty Gb är sann (ty $\beta \in \mathrm{Ext}(G)$).
- $\forall x\,(Gx \to Hx)$ **sann**, ty $Ga \to Ha$ och $Gb \to Hb$ sanna, ty Ga falsk (ty $\alpha \notin \mathrm{Ext}(G)$) och Hb sann (ty $\beta \in \mathrm{Ext}(H)$).
- $\forall x\,(Fx \to Hx)$ **falsk**, ty $Fa \to Ha$ falsk, ty Fa sann (ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(F)$) och Ha falsk (ty $\alpha \notin \mathrm{Ext}(H)$).

Saken är klar.

5) Se förra sidan.

6) För att avgöra om $\quad \forall x\, Px \lor {\sim}\exists x\, Px\ \vDash\ \forall x \forall y\,(Px \to Py), \quad$ söker vi med tablåmetoden ett motexempel, dvs en tolkning som gör premissen sann och slutsatsen falsk:

I tablån växlar faserna enligt:

satslogiska	1,2 ; 9
$\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$	3,4
$\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$	5,6,7,8

$\mathbb{T}:$	$\forall x\, Px \lor {\sim}\exists x\, Px$	$\surd_1$
$\mathbb{F}:$	$\forall x \forall y\,(Px \to Py)$	$\surd_{3:a}$

Vänster gren:

${}_1\mathbb{T}:$	$\forall x\, Px$	a_5, b_6
${}_3\mathbb{F}:$	$\forall y\,(Pa \to Py)$	$\surd_{4:b}$
${}_4\mathbb{F}:$	$Pa \to Pb$	$\surd_9$
${}_5\mathbb{T}:$	Pa	
${}_6\mathbb{T}:$	Pb	
${}_9\mathbb{T}:$	Pa	
${}_9\mathbb{F}:$	Pb	
	$\times$	

Höger gren:

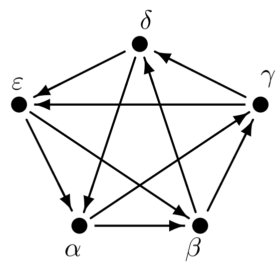
${}_1\mathbb{T}:$	${\sim}\exists x\, Px$	$\surd_2$
${}_2\mathbb{F}:$	$\exists x\, Px$	a_7, b_8
${}_3\mathbb{F}:$	$\forall y\,(Pa \to Py)$	$\surd_{4:b}$
${}_4\mathbb{F}:$	$Pa \to Pb$	$\surd_9$
${}_7\mathbb{F}:$	Pa	
${}_8\mathbb{F}:$	Pb	
${}_9\mathbb{T}:$	Pa	
${}_9\mathbb{F}:$	Pb	
	$\times$	

Tablån sluter sig, så **påståendet gäller**.

7) Att visa: $\ \vdash\ (\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y$.
Idé: Antag motsatsen. Om $\exists x\, Px$ gäller, gäller Pa för något a. Om $a \neq b$ för något b, gäller $\exists x\, \exists y\, x \neq y$, motsägelse. Så alla element är a och $\forall x\, Px$ gäller, så $\exists x\, Px \to \forall x\, Px$, motsägelse.

1	(1)	${\sim}((\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y)$	antagande		
2	(2)	$\exists x\, Px$	antagande		
3	(3)	Pa	antagande		
4	(4)	$a \neq b$	antagande		
4	(5)	$\exists y\, a \neq y$	4	$\exists$I	
4	(6)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	5	$\exists$I	
4	(7)	$(\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y$	6	$\lor$I	
1,4	(8)	$\curlywedge$	1,7	${\sim}$E	
1	(9)	${\sim}a \neq b$	4,8	${\sim}$I	
1	(10)	$a = b$	9	DN	
1,3	(11)	Pb	10,3	=E	
1,2	(12)	Pb	2,3,11	$\exists$E	[a inte i (2),(11),(1)]
1,2	(13)	$\forall x\, Px$	12	$\forall$I	[b inte i (1),(2)]
1	(14)	$\exists x\, Px \to \forall x\, Px$	2,13	$\to$I	
1	(15)	$(\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y$	14	$\lor$I	
1	(16)	$\curlywedge$	1,15	${\sim}$E	
	(17)	${\sim}{\sim}((\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y)$	1,16	${\sim}$I	
	(18)	$(\exists x\, Px \to \forall x\, Px) \lor \exists x\, \exists y\, x \neq y$	17	DN	

Slutsatsen på rad (18) beror inte av någonting, så **saken är klar**.



8) Vi söker en tolkning med ändlig domän D som gör både $\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \sim Ryx)$ och $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \;\&\; Rxy \;\&\; Rxz)$ sann.
Den första sentensen säger, uttryckt med "punkter och pilar", att inga pilar är dubbelriktade (speciellt inga loopar), den andra att det från varje punkt går minst två pilar.
Det räcker tydligen att som D ta fem personer som sitter kring ett bord och låta Rxy ges av "Ref(x) har Ref(y) högst två steg till höger om sig".
Mer abstrakt: $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$,
$\mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\beta,\delta\rangle, \langle\gamma,\delta\rangle, \langle\gamma,\varepsilon\rangle, \langle\delta,\varepsilon\rangle, \langle\delta,\alpha\rangle, \langle\varepsilon,\alpha\rangle, \langle\varepsilon,\beta\rangle\}$ (se fig.)
Denna tolkning gör tydligen båda sentenserna sanna, så **svar: Ja, det kan det**.
(Att det behövs minst 5 element i domänen för att göra båda sentenserna sanna ses av att det för en domän med n element måste vara minst $2n$ pilar (två från varje element) och att det finns $\frac{n(n-1)}{2}$ st par av olika element. $2n \leq \frac{n(n-1)}{2}$ ger $5 \leq n$ (då $n > 0$).)

9) Vi har: $\mathcal{R}pq$ är sann precis om $p \,\&\, q$ är satisfierbar (dvs $p \,\&\, q \nvDash \curlywedge$).
Att $\mathcal{R}$ är **reflexiv** betyder att $\mathcal{R}pp$ är sann för alla p. Men $\curlywedge \,\&\, \curlywedge \equiv \curlywedge$, så $\mathcal{R}\curlywedge\curlywedge$ är falsk.
Att $\mathcal{R}$ är **symmetrisk** betyder att $\mathcal{R}pq \Rightarrow \mathcal{R}qp$ för alla p, q. Men eftersom det gäller att $p \,\&\, q \equiv q \,\&\, p$, gäller också $p \,\&\, q \nvDash \curlywedge \;\Leftrightarrow\; q \,\&\, p \nvDash \curlywedge$.
Att $\mathcal{R}$ är **transitiv** betyder att $(\mathcal{R}pq$ och $\mathcal{R}qr) \Rightarrow \mathcal{R}pr$ för alla p, q, r. Men om p är A, q är B och r är $\sim A$, är $p \,\&\, q$ och $q \,\&\, r$ var och en satisfierbar, men $p \,\&\, r$ (dvs $A \,\&\, \sim A \equiv \curlywedge$) inte satisfierbar, dvs $\mathcal{R}pq$ och $\mathcal{R}qr$ sanna och $\mathcal{R}pr$ falsk.
Så **svar: $\mathcal{R}$ är symmetrisk, men varken reflexiv eller transitiv**.

10) Låt ϕz vara formeln $(a + b) + z = a + (b + z)$. Vi skall först visa $\forall z\, \phi z$.
Enligt axiom P3 gäller $(a + b) + 0 = a + b$ och $a + (b + 0) = a + b$, så $\phi 0$.
Antag att ϕc gäller, dvs $(a+b)+c = a+(b+c)$. Då gäller $(a+b)+S(c) \overset{\text{P4}}{=} S((a+b)+c) \overset{\phi c}{=} S(a + (b + c)) \overset{\text{P4}}{=} a + S(b + c) \overset{\text{P4}}{=} a + (b + S(c))$, dvs $\phi S(c)$.
Därmed gäller $\phi c \rightarrow \phi S(c)$, för alla c, så $\forall z\,(\phi z \rightarrow \phi S(z))$.
Så $\phi 0 \;\&\; \forall z\,(\phi z \rightarrow \phi S(z))$ gäller och enligt axiom P7 (alfabetiska varianten med z i stället för x) $\forall z\, \phi z$, dvs $\forall z\,(a + b) + z = a + (b + z)$.
Eftersom detta gäller för godtyckliga a, b, fås ($\forall$I) att
det önskade $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x + y) + z = x + (y + z)$ **är visat**.

11) Vi skall visa att $\Diamond(A \rightarrow B),\ \Box(\sim B \rightarrow \Box A) \vdash_{S5} \Diamond B$.
Idé: Enligt premiss 1 finns en värld där $A \rightarrow B$ gäller. Om B inte gäller där, gäller $\sim B$ och enligt premiss 2 $\sim B \rightarrow \Box A$ så $\Box A$, därmed A och alltså B. Motsägelse, så B gäller i den världen.

1	(1)	$\Diamond(A \rightarrow B)$	premiss		
2	(2)	$\Box(\sim B \rightarrow \Box A)$	premiss		
3	(3)	$A \rightarrow B$	antagande		
4	(4)	$\sim B$	antagande		
2	(5)	$\sim B \rightarrow \Box A$	2	$\Box$E	
2,4	(6)	$\Box A$	5,4	$\rightarrow$E	
2,4	(7)	A	6	$\Box$E	
2,3,4	(8)	B	3,7	$\rightarrow$E	
2,3,4	(9)	$\curlywedge$	4,8	$\sim$E	
2,3	(10)	$\sim\sim B$	4,9	$\sim$I	
2,3	(11)	B	10	DN	
2,3	(12)	$\Diamond B$	11	$\Diamond$I	
1,2	(13)	$\Diamond B$	1,3,12	$\Diamond$E	[(12),(2) fullt modaliserade]

Eftersom slutsatsen på sista raden bara beror av premisserna på raderna (1) och (2), är **härledningen klar**.

12) Vi skall visa att

$\forall x \forall y\ x = y,\ \Box\, \exists x\, Rxx,\ \Diamond\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&{\sim}\, Rxy\ \&{\sim}\, Ryx)\ \nvDash_{S5}\ \Box\, \forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$.

Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den högra sentensen falsk.
Att den högra sentensen är falsk betyder att det finns en värld, u säg, där $\forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$ är falsk, dvs det finns i $u(D)$ två olika element som står i relationen R. Den första premissen säger att det i den verkliga världen w^* finns högst ett element (så $w^* \neq u$). Enligt premiss två finns i varje värld ett element som står i relationen R till sig själv, vi prövar med samma element α i alla världar. Den tredje premissen säger att det i någon värld finns två olika element som inte i någon ordning står i relationen R till varandra. Vi inför för detta ett tredje element i u. (Det skulle ha gått lika bra med två element och tre världar.)
Betrakta alltså tolkningen: $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta, \gamma\},\quad w^*(D) = \{\alpha\},\ u(D) = D,$
$w^*[R] = \{\langle \alpha, \alpha \rangle\},\ u[R] = \{\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \gamma \rangle\}$.
Den visar påståendet, ty i den gäller att

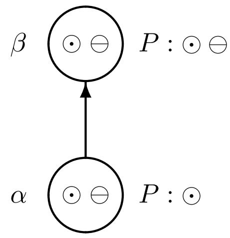
- $\forall x\, \forall y\ x = y$ är **sann**, ty $w^*[\forall x\, \forall y\ x = y] = 1$, ty ($w^*(D) = \{\alpha\}$ och) $w^*[\forall y\ a = y] = 1$, ty $w^*[a = a] = 1$
- $\Box\, \exists x\, Rxx$ är **sann**, ty $w^*[\Box\, \exists x\, Rxx] = 1$, ty $w^*[\exists x\, Rxx] = u[\exists x\, Rxx] = 1$, ty $w^*[Raa] = u[Raa] = 1$, ty $\langle \alpha, \alpha \rangle \in w^*[R], u[R]$ och $\alpha \in w^*(D), u(D)$
- $\Diamond\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&{\sim}\, Rxy\ \&{\sim}\, Ryx)$ är **sann**, ty $w^*[\Diamond\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&{\sim}\, Rxy\ \&{\sim}\, Ryx)] = 1$, ty $u[\exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&{\sim}\, Rxy\ \&{\sim}\, Ryx)] = 1$, ty ($\alpha \in u(D)$ och) $u[\exists y\, (a \neq y\ \&{\sim}\, Ray\ \&{\sim}\, Rya)] = 1$, ty ($\beta \in u(D)$ och) $u[a \neq b\ \&{\sim}\, Rab\ \&{\sim}\, Rba)] = 1$, ty $u[a \neq b] = u[{\sim}\, Rab] = u[{\sim}\, Rba] = 1$, ty α, β är olika element i D och $u[Rab] = u[Rba] = 0$, ty $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle \notin u[R]$
- $\Box\, \forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$ är **falsk**, ty $w^*[\Box\, \forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)] = 0$, ty $u[\forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)] = 0$, ty ($\alpha \in u(D)$ och) $u[\forall y\, (Ray \to a = y)] = 0$, ty ($\gamma \in u(D)$ och) $u[Rac \to a = c] = 0$, ty $u[Rac] = 1$ (ty $\langle \alpha, \gamma \rangle \in u[R]$) och $u[a = c] = 0$ (ty α, γ är olika element i D)

Så **vi har visat att**
$\forall x \forall y\ x = y,\ \Box\, \exists x\, Rxx,\ \Diamond\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y\ \&{\sim}\, Rxy\ \&{\sim}\, Ryx)\ \nvDash_{S5}\ \Box\, \forall x\, \forall y\, (Rxy \to x = y)$.

13) Vi skall visa att $A \vee {\sim} A\ \vDash_I\ {\sim}{\sim} A \to A$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash A \vee {\sim} A$. Det betyder att $\alpha \Vdash A$ eller $\alpha \Vdash {\sim} A$. I det första fallet gäller för alla $\sigma \in S$ att $\sigma \Vdash A$ och i det andra fallet för alla $\sigma \in S$ att $\sigma \Vdash {\sim} A$ (ty $\tau \nVdash A$ för alla $\tau \in S$), så $\sigma \nVdash {\sim}{\sim} A$. I ingetdera fallet gäller för något $\sigma \in S$ både att $\sigma \Vdash {\sim}{\sim} A$ och $\sigma \nVdash A$, så $\alpha \Vdash {\sim}{\sim} A \to A$. Vi har alltså visat $A \vee {\sim} A\ \vDash_I\ {\sim}{\sim} A \to A$, **saken är klar**.

14) En härledning $\exists x\, {\sim} Px \to \forall x\, {\sim} Px \vdash \exists x\, Px \to \forall x\, Px$ med naturlig deduktion utan regeln DN, skulle vara en härledning i NJ, ett sunt system för intuitionistisk logik. Det skulle alltså gälla $\exists x\, {\sim} Px \to \forall x\, {\sim} Px \vDash_I \exists x\, Px \to \forall x\, Px$.
men tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\},\ \leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$,
$\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) = \{\odot, \ominus\}$,
$\mathrm{warr}(\alpha) = \{\langle \text{‘}P\text{’}, \odot \rangle\}$, $\mathrm{warr}(\beta) = \{\langle \text{‘}P\text{’}, \odot \rangle, \langle \text{‘}P\text{’}, \ominus \rangle\}$ ger:

- $\alpha\ \Vdash\ \exists x\, {\sim} Px \to \forall x\, {\sim} Px$,
  ty $\alpha, \beta \nVdash \exists x\, {\sim} Px$, ty $\alpha, \beta \nVdash {\sim} P\odot, {\sim} P\ominus$, ty $\beta \Vdash P\odot, P\ominus$
- $\alpha\ \nVdash\ \exists x\, Px \to \forall x\, Px$,
  ty $\alpha \Vdash \exists x\, Px$ (ty $\alpha \Vdash P\odot$) och $\alpha \nVdash \forall x\, Px$ (ty $\alpha \nVdash P\ominus$)



Så $\exists x\, {\sim} Px \to \forall x\, {\sim} Px \nvDash_I \exists x\, Px \to \forall x\, Px$ och **härledningen måste använda DN**.

15) Att Γ_1 och Γ_2 saknar gemensam modell betyder att $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ saknar modell. Enligt kompakthetssatsen har Γ en ändlig delmängd Δ som saknar modell. Låt $\Delta_i = \Delta \cap \Gamma_i, i = 1, 2$, så $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Med $\Delta_1 = \{p_1, \ldots, p_n\}$, låt p vara $p_1\ \& \ldots \&\ p_n$ (${\sim}\curlywedge$ om $\Delta_1 = \varnothing$).
En tolkning är då en modell för Δ_1 om och endast om den gör p sann, så $\Delta_1 \vDash p$ och ingen modell för Δ_2 gör p sann (annars skulle Δ ha en modell), dvs $\Delta_2 \vDash {\sim} p$. Eftersom $\Delta_i \subseteq \Gamma_i$ (så varje modell för Γ_i är en modell för Δ_i) följer att $\Gamma_1 \vDash p$ och $\Gamma_2 \vDash {\sim} p$. **Saken är klar**.

16) Den givna sentensen $\quad \forall X\, \exists u\, \forall x\, (u(x) \neq x\ \leftrightarrow\ Xx) \quad$ är sann precis om det för varje delmängd $\mathcal{M}$ ($= \mathrm{Ext}(X)$) till D finns en funktion f som håller precis elementen i $D \setminus \mathcal{M}$ fixa. Ett sådant f finns tydligen alltid om $|\, D\,| \geq 2$, men **inte** i det enda fallet $|\, D\,| = 1$, $\mathcal{M} = D$. (Varje funktion håller D:s enda element fixt.) **Svar: Sentensen är betingat sann**.