Institutionen för matematik
**KTH**
J.Kristoferson, B.Ek

**Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT**
**Tisdagen den 17 augusti 2004**

Skrivtid: 14.00 – 19.00.
**Examinatorer:** Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
**Tillåtet hjälpmedel:** Utdelat formelblad.
**För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.**
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2004 klarat kontrollskrivning nr $i$ ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

## Del A

**1** Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) stöter vi på tre öbor, A, B och C.
A säger att B och C är kungar och B säger att A är narr och C kung.
Avgör för var och en av A, B och C om han/hon är kung eller narr.

**2** Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)

$$A \vee B \ \vdash\ A \vee (B \,\&\, {\sim} A)$$

**3** Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x \forall y\, (Fx \rightarrow Fy) \ \vdash\ \exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, Fx.$$

**4** Visa att

$$\forall x\, (Fx \rightarrow \exists y\, Gy),\ \forall x\, (Gx \rightarrow Hx) \ \nvDash\ \forall x\, (Fx \rightarrow Hx).$$

**5** Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. “Om någon hälsar på Pelle, så finns det någon som inte är oartig mot Pelle.”
2. “Om någon hälsar på någon och denne inte hälsar tillbaka, så är den senare oartig mot den förra.”
Använd följande lexikon:
$p$: Pelle, $Hxy$ : Ref($x$) hälsar på Ref($y$) , $Oxy$ : Ref($x$) är oartig mot Ref($y$).

**6** Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, Px \vee\ {\sim}\exists x\, Px \ \vDash\ \forall x \forall y\, (Px \rightarrow Py).$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

**7** Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\vdash\ (\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px) \vee \exists x\, \exists y\, x \neq y.$$

*Vänd!*

**8** Kan det finnas någon binär relation $R$ på en ändlig domän, som är asymmetrisk (dvs $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \sim Ryx)$) och har egenskapen $\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)$? Ge exempel eller motbevis.

**9** Definiera en binär relation $\mathcal{R}$ på mängden av alla sentenser (i ett givet språk) enligt: $\mathcal{R}pq$ betyder att sentensen $p \,\&\, q$ är satisfierbar.
Är $\mathcal{R}$ reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv? Det skall klart framgå av lösningen vad dessa egenskaper innebär.

**10** Visa att $\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)$ följer ur Peanos axiom.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Ledning: Visa först för godtyckliga $a, b$ att $\forall z\ (a + b) + z = a + (b + z)$.

## Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
**Var noga med att motivera dina svar!**

**11** Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Diamond(A \rightarrow B),\ \Box(\sim B \rightarrow \Box A)\ \vdash_{S5}\ \Diamond B.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

**12** Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\forall x \forall y\ x = y,\ \ \Box\, \exists x\, Rxx,\ \ \Diamond\, \exists x\, \exists y\, (x \neq y \,\&\!\sim Rxy \,\&\!\sim Ryx)\ \nvDash_{S5}$$
$$\Box\, \forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow x = y).$$

**13** Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \vee \sim A\ \vDash_I\ \sim\sim A \rightarrow A.$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

**14** I klassisk logik gäller att $\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px$ kan härledas från $\exists x \sim Px \rightarrow \forall x \sim Px$ med naturlig deduktion (detta behöver ej utföras).
Visa att man då måste använda DN-regeln (eller SI-regel som visas med DN).

**15** Låt $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ vara två sentensmängder i första ordningens predikatlogik, sådana att $\Gamma_1$ och $\Gamma_2$ saknar gemensam modell. Visa att det finns en sentens $p$ sådan att $\Gamma_1 \vDash p$ och $\Gamma_2 \vDash \sim p$.

**16** Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\forall X\, \exists u\, \forall x\, (u(x) \neq x \leftrightarrow Xx)$$

*Lycka till!*

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.