Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D1 och IT2, 14 januari 2005

1) Vi har påståendena:
A: ”B och C är olika sorter.”
B: ”Jag och C är olika sorter.”
C: ”Jag och A är av samma sort.”
Eftersom A och B gör samma påstående måste A och B vara av samma sort. Antag först att A och B är kungar. Deras påståenden visar då att C är narr. C:s påstående är då falskt, vilket stämmer med att C är narr. Antag sedan att A och B är narrar. Deras (falska) påståenden visar då att C också är narr. Men då blir C:s påstående sant, vilket är omöjligt. Alltså får vi
Svar: Ja, man kan avgöra saken: A och B är kungar, C narr.

2) Att visa: $A \vee B,\ \sim(A \,\&\, B)\ \vdash\ A \leftrightarrow \sim B$.
Idé: Härled först $\sim B$ från antagandet A: antag B och få motsägelse till premiss nr 2. Härled sedan A från antagandet $\sim B$: tillämpa en SI-regel på premiss nr 1 och $\sim B$.

1	(1)	$A \vee B$	premiss	
2	(2)	$\sim(A \,\&\, B)$	premiss	
3	(3)	A	antagande	
4	(4)	B	antagande	
3,4	(5)	$A \,\&\, B$	3,4	&I
2,3,4	(6)	$\curlywedge$	2,5	~E
2,3	(7)	$\sim B$	4,6	~I
8	(8)	$\sim B$	antagande	
1,8	(9)	A	1,8	SI(DS)
1,2	(10)	$A \leftrightarrow \sim B$	3,7,8,9	$\leftrightarrow$I

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så
härledningen är klar.

3) Att visa: $\exists x \sim Px \rightarrow \forall x \sim Px\ \vdash\ \exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px$.
Idé: Antag $\exists x\, Px$. Antag sedan $\sim\forall x\, Px$, använd QS-regel, premissen, QS-regel och få motsägelse etc.

1	(1)	$\exists x \sim Px \rightarrow \forall x \sim Px$	premiss	
2	(2)	$\exists x\, Px$	antagande	
3	(3)	$\sim\forall x\, Px$	antagande	
3	(4)	$\exists x \sim Px$	3	SI(QS)
1,3	(5)	$\forall x \sim Px$	1,4	$\rightarrow$E
1,3	(6)	$\sim\exists x\, Px$	5	SI(QS)
1,2,3	(7)	$\curlywedge$	6,2	~E
1,2	(8)	$\sim\sim\forall x\, Px$	7	~I
1,2	(9)	$\forall x\, Px$	8	DN
1	(10)	$\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px$	2,9	$\rightarrow$I

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

4) Vi skall visa att $\forall x\,\exists y\,(Fx \leftrightarrow Gy) \not\models \exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gy)$.
Påståendet visas av en tolkning som gör den vänstra sentensen sann och den högra falsk. Första kravet: för varje individ α (i domänen) ska finnas någon individ β så att Fa och Gb har samma sanningsvärde. Andra kravet $\iff$ $\sim\exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gy)$ sann $\iff$ $\forall y\,\exists x\;\sim(Fx \leftrightarrow Gy)$ $\iff$ för varje individ α ska finnas någon individ β så att Fb och Ga har olika sanningsvärden. (I resonemanget använder vi den vanliga konventionen om namn, att $\mathrm{Ref}(a) = \alpha$ etc.)
Tydligen fungerar tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\alpha\}$, ty då är
$\forall x\,\exists y\,(Fx \leftrightarrow Gy)$ **sann**,
ty $\exists y\,(Fa \leftrightarrow Gy)$ och $\exists y\,(Fb \leftrightarrow Gy)$ är båda sanna, ty $Fa \leftrightarrow Ga$ är sann och $Fb \leftrightarrow Gb$ är sann.
$\exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gy)$ **falsk**,
ty $\forall x\,(Fx \leftrightarrow Ga)$ och $\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gb)$ är båda falska, ty $Fb \leftrightarrow Ga$ är falsk och $Fa \leftrightarrow Gb$ är falsk.
Saken är klar.

5) För att avgöra om
$\forall x\,(Fx \rightarrow Ga), \exists x\,(Fx \vee Gx) \models \exists x\,Gx$
söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna så:
1. Satslogiska 6,7
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 1
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 2–5

Tablån sluter sig, så **slutledningen är giltig**.

	$\mathbb{T}:$	$\forall x\,(Fx \rightarrow Ga)$	a_2, b_3
	$\mathbb{T}:$	$\exists x\,(Fx \vee Gx)$	$\surd_{1:b}$
	$\mathbb{F}:$	$\exists x\,Gx$	a_4, b_5
1	$\mathbb{T}:$	$Fb \vee Gb$	$\surd_6$
2	$\mathbb{T}:$	$Fa \rightarrow Ga$	
3	$\mathbb{T}:$	$Fb \rightarrow Ga$	$\surd_7$
4	$\mathbb{F}:$	Ga	
5	$\mathbb{F}:$	Gb	

6 $\mathbb{T}:$ Fb 6 $\mathbb{T}:$ Gb
$\times$

7 $\mathbb{F}:$ Fb 7 $\mathbb{T}:$ Ga
$\times$ $\times$

6) **Svar:** $\forall x\,(Bx \rightarrow (Hx \vee \exists y\,Syx))$ **respektive** $\exists x\,(\sim\exists y\,Sxy\ \&\ \exists z\,Szx)$**.**

7) Att visa: $\forall x\,\forall y\,x = y \vdash \exists x\,\exists y\,Pxy \rightarrow \forall x\,\forall y\,Pxy$.
Idé: Enligt premissen finns bara ett element i domänen. Antag $\exists x\,\exists y\,Pxy$, och gör två antaganden för $\exists$E så att vi får Pab. Byt nu med hjälp av premissen ut a mot c och b mot d så att vi får Pcd. Då kan två $\forall$I göras så att vi får $\forall x\,\forall y\,Pxy$.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,x = y$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\exists y\,Pxy$	antagande		
3	(3)	$\exists y\,Pay$	antagande		
4	(4)	Pab	antagande		
1	(5)	$\forall y\,a = y$	1	$\forall$E	
1	(6)	$a = c$	5	$\forall$E	
1	(7)	$\forall y\,b = y$	1	$\forall$E	
1	(8)	$b = d$	1	$\forall$E	
1,4	(9)	Pcb	6,4	=E	
1,4	(10)	Pcd	8,9	=E	
1,3	(11)	Pcd	3,4,10	$\exists$E	[b inte i (3),(10),(1)]
1,2	(12)	Pcd	2,3,11	$\exists$E	[a inte i (2),(11),(1)]
1,2	(13)	$\forall y\,Pcy$	12	$\forall$I	[d inte i (1),(2)]
1,2	(14)	$\forall x\,\forall y\,Pxy$	13	$\forall$I	[c inte i (1),(2)]
1	(15)	$\exists x\,\exists y\,Pxy \rightarrow \forall x\,\forall y\,Pxy$	2,14	$\rightarrow$I	

Slutsatsen på rad (15) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

8) **a)** Antag att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. $\forall x\, \exists y\, Rxy$ är då sann eftersom Raa är sann för alla a (reflexiviteten). Antag nu att $Rab \,\&\, Rcb$ är sann. Med hjälp av symmetrin fås att $Rcb \,\&\, Rba$ är sann. Transitiviteten ger att Rca är sann, och vi finner alltså att $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \to Rzx)$ är sann.
b) Antag att $\forall x\, \exists y\, Rxy$ är sann ... (1) och att $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \to Rzx)$ är sann ... (2).
För godtyckligt a finns då enligt (1) b så att Rab är sann. Då är $Rab \,\&\, Rab$ sann, och (2) ger att Raa är sann. Alltså är $\mathcal{R}$ reflexiv. Antag nu att Rab är sann. Reflexiviteten ger att Rbb är sann. Alltså är $Rab \,\&\, Rbb$ sann. (2) ger att Rba är sann. Alltså är $\mathcal{R}$ symmetrisk. Antag slutligen att $Rab \,\&\, Rbc$ är sann. Med hjälp av symmetrin fås att $Rcb \,\&\, Rab$ är sann. (3) ger nu att Rac är sann. Alltså är $\mathcal{R}$ transitiv.
Svar: svaret är ja i båda fallen.

9) **a)** Om t.ex. p är A och q är $\sim A$, så blir $p \leftrightarrow q$ falsk i alla tolkningar, dvs $p \leftrightarrow q \;\vDash\; q \vee r$ gäller. Om vidare r t.ex. är $\sim A$ så gäller *inte* $q \leftrightarrow r \;\vDash\; p \,\&\, r$ (ty det gäller ju t.o.m. i alla tolkningar att $q \leftrightarrow r$ är sann och $p \,\&\, r$ falsk).
b) Antag att $q \leftrightarrow r \;\vDash\; p \,\&\, r$ gäller ... ($\star$)
Betrakta en godtycklig tolkning vari $p \leftrightarrow q$ är sann. Då är antingen både p och q sanna, och då är $q \vee r$ sann. Eller så är både p och q falska, och då ger ($\star$) (eftersom $p \,\&\, r$ är falsk) att $q \leftrightarrow r$ är falsk, och vi får att r är sann, och återigen att $q \vee r$ är sann. Alltså gäller $p \leftrightarrow q \;\vDash\; q \vee r$.
Svar: nej i a), ja i b).

10) Låt ϕx vara formeln $S(0) * x = x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$.
Man får $S(0) * 0 \overset{\text{P5}}{=} 0$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $S(0) * a = a$.
Då fås $S(0) * S(a) \overset{\text{P6}}{=} (S(0) * a) + S(0) \overset{\phi a}{=} a + S(0) \overset{\text{P4}}{=} S(a + 0) \overset{\text{P3}}{=} S(a)$, dvs $\phi S(a)$.
För godtyckligt a gäller alltså $\phi a \to \phi S(a)$ och därmed $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0 \,\&\, \forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) $\forall x\, \phi x$. **Saken är klar**.

11) Vi skall visa att $\Box\, (A \to B),\ \Diamond\, (\Box \sim A \to B) \;\vdash_{S5}\; \Diamond\, B$.
Idé: Om A gäller i någon värld, så gäller också B i denna, enligt första premissen. I annat fall gäller $\Box \sim A$ (i varje värld), och den andra premissen ger en värld där B gäller. Alltså gäller $\Diamond\, B$ i båda fallen.
Falluppdelningen tyder på att ett indirekt bevis (antag $\sim \Diamond\, B$) behövs.

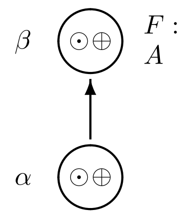
1	(1)	$\Box\, (A \to B)$	premiss		
2	(2)	$\Diamond\, (\Box \sim A \to B)$	premiss		
3	(3)	$\Box \sim A \to B$	antagande		
4	(4)	$\sim \Diamond\, B$	antagande		
5	(5)	A	antagande		
1	(6)	$A \to B$	1	$\Box$E	
1,5	(7)	B	6,5	$\to$E	
1,5	(8)	$\Diamond\, B$	7	$\Diamond$I	
1,4,5	(9)	$\curlywedge$	4,8	$\sim$E	
1,4	(10)	$\sim A$	5,9	$\sim$I	
1,4	(11)	$\Box \sim A$	10	$\Box$I	[(1) och (4) fullt modaliserade]
1,3,4	(12)	B	3,11	$\to$E	
1,3,4	(13)	$\Diamond\, B$	12	$\Diamond$I	
1,3,4	(14)	$\curlywedge$	4,13	$\sim$E	
1,3	(15)	$\sim\sim \Diamond\, B$	4,14	$\sim$I	
1,3	(16)	$\Diamond\, B$	15	DN	
1,2	(17)	$\Diamond\, B$	2,3,16	$\Diamond$E	[(1) och (16) fullt modaliserade]

Eftersom slutsatsen på rad (17) bara beror av premisserna på raderna (1) och (2), är **härledningen klar**.

12) Vi skall visa att $\Diamond \forall x\, Gx,\ \Diamond \exists x\, Fx,\ \Diamond (\exists x\, Hx \,\&\, \forall x\, (Fx \leftrightarrow Gx)) \nvDash_{S5}\ \Diamond \exists x\, Gx$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den högra sentensen falsk.
Om vi låter $v[G] = \varnothing$ för alla världar v, så blir den högra sentensen falsk. För att få den första premissen sann måste vi då ha någon värld u med tom domän. För att få den andra premissen sann måste vi ha någon värld w_1 innehållande ett objekt som har egenskapen F. För att få den tredje premissen sann måste vi ha någon värld w_2 innehållande ett objekt som har egenskapen H men inget som har egenskapen F (eftersom $\forall x\, (Fx \leftrightarrow Gx)$ ska vara sann i w_2 och $w_2[G] = \varnothing$ ska gälla).
Ovanstående resonemang visar att följande tolkning med tre världar löser uppgiften: $W = \{u, w_1, w_2\}$, $D = \{\alpha\}$, $u(D) = u[F] = u[G] = u[H] = \varnothing$, $w_1(D) = w_1[F] = \{\alpha\}$, $w_1[G] = w_1[H] = \varnothing$, $w_2(D) = w_2[H] = \{\alpha\}$, $w_2[F] = w_2[G] = \varnothing$.

13) Vi skall visa att $A \to C,\ B \to {\sim} C\ \vDash_I\ B \to {\sim} A$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash A \to C$ och $\alpha \Vdash B \to {\sim} C$. Vi har att visa att $\alpha \Vdash B \to {\sim} A$
Antag (för att få motsägelse) att $\alpha \nVdash B \to {\sim} A$, dvs det finns ett $\sigma \in S$ med $\sigma \Vdash B$ men $\sigma \nVdash {\sim} A$. Då finns $\tau \in S$ med $\tau \geq \sigma$ och $\tau \Vdash A$. Eftersom $\alpha \Vdash A \to C$ följer att $\tau \Vdash C$. Vidare ger $\sigma \Vdash B$ och $\alpha \Vdash B \to {\sim} C$ att $\sigma \Vdash {\sim} C$, vilket strider mot att $\tau \Vdash C$. Vi får alltså en motsägelse från antagandet $\alpha \nVdash B \to {\sim} A$, dvs vi har visat $\alpha \Vdash B \to {\sim} A$, och **saken är klar**.

14) Vi skall visa att $\exists x\, {\sim} Fx,\ \exists x\, Fx \to A\ \nvDash_I$ $\forall x\, ({\sim} Fx \vee A)$ genom att finna en tolkning $\mathcal{K}$ som bestyrker $\exists x\ {\sim} Fx$ och $\exists x\, Fx \to A$ och inte bestyrker $\forall x\, ({\sim} Fx \vee A)$.
Betrakta tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle \alpha, \beta \rangle\}$, $dom(\alpha) = \{\odot, \oplus\}$, $dom(\beta) = \{\odot, \oplus\}$, $warr(\alpha) = \varnothing$, $warr(\beta) = \{\langle \text{`}F\text{'}, \odot \rangle, A\}$.
Den ger:



- $\alpha \Vdash \exists x\, {\sim} Fx$, ty $\oplus \in dom(\alpha)$, $\alpha \nVdash F\oplus$ och $\beta \nVdash F\oplus$.
- $\alpha \Vdash \exists x\, Fx \to A$, ty $\alpha \nVdash \exists x\, Fx$ (eftersom $\alpha \nVdash F\odot$ och $\alpha \nVdash F\oplus$), medan ($\beta \Vdash \exists x\, Fx$ eftersom $\beta \Vdash F\odot$) och $\beta \Vdash A$.
- $\alpha \nVdash \forall x\, ({\sim} Fx \vee A)$, ty $\alpha \nVdash {\sim} F\odot \vee A$, ty $\alpha \nVdash {\sim} F\odot$ (eftersom $\beta \Vdash F\odot$) och $\alpha \nVdash A$.

Saken är klar.

15) Förutsättningen är ekvivalent med att sentensmängden $\Gamma \cup {\sim} \Delta \cup \Theta$ saknar modell, där ${\sim}\Delta = \{{\sim} p :\ p \in \Delta\}$. Enligt kompakthetssatsen har den en ändlig delmängd som saknar modell. Denna delmängd kan skrivas $\Gamma' \cup {\sim}\Delta' \cup \Theta'$ där $\Gamma', {\sim}\Delta'$ och Θ' är ändliga delmänder av $\Gamma, {\sim}\Delta$ respektive Θ. **Därmed är saken klar**.

16) Den givna sentensen $\forall u\, \exists X\, \forall x\, (u(u(x)) = u(x) \leftrightarrow Xu(x))$ är sann precis om det för varje val av $f : D \to D$ finns $P \subseteq D$ så att för alla $\sigma \in D$ gäller att $f(\sigma) \in P$ omm $f(f(\sigma)) = f(\sigma)$. Eftersom vi för varje val av f kan sätta $P = \{f(\sigma) :\ f(f(\sigma)) = f(\sigma),\ \sigma \in D\}$ så ser vi att sentensen är sann i alla tolkningar, dvs
Svar: Sentensen är en tautologi.