Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Fredagen den 14 januari 2005

Skrivtid: 14.00 – 19.00
Examinatorer: Jan Kristoferson (IT), tel 7907287, och Bengt Ek (D), tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.
För godkänt krävs 13 poäng på del A. Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var. Den som vårterminen 2004 klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dessa uppgifter).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) Vid ett besök på Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) stöter vi på öborna A, B och C.
A säger: ”B och C är olika sorter” (dvs inte båda kungar och inte båda narrar).
B säger: ”Just det, C och jag är olika sorter.”
C säger: ”A och jag är samma sort.”
Räcker detta för att avgöra vad var och en av A, B och C är, kung eller narr? Vad är de i så fall?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) att

$$A \vee B,\ \sim(A \,\&\, B)\ \vdash\ A \leftrightarrow \sim B.$$

3) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna) att

$$\exists x \sim Px \rightarrow \forall x \sim Px\ \vdash\ \exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Px.$$

4) Visa att

$$\forall x\, \exists y\, (Fx \leftrightarrow Gy)\ \nvDash\ \exists y\, \forall x\, (Fx \leftrightarrow Gy).$$

5) Använd tablåmetoden för att avgöra om

$$\forall x\, (Fx \rightarrow Ga)\,,\ \exists x\, (Fx \vee Gx)\ \vDash\ \exists x\, Gx.$$

Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

6) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
1. ”Var och en som badar bastu hoppar antingen själv i sjön eller blir islängd av någon.”
2. ”Det finns någon som inte slänger någon i sjön men blir islängd av någon.”
Använd följande lexikon: Bx : ”Ref(x) badar bastu”,
Hx : ”Ref(x) hoppar i sjön”, Sxy : ”Ref(x) slänger Ref(y) i sjön”.

7) Visa med naturlig deduktion:

$$\forall x\, \forall y\ \ x = y\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, Pxy\ \rightarrow\ \forall x\, \forall y\, Pxy.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

Vänd!

8) Låt en binär relation $\mathcal{R}$ vara tolkning av ett tvåställigt predikat R.
a) Om $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation, måste då sentenserna

$$\forall x\, \exists y\, Rxy \quad \text{och} \quad \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rzy) \rightarrow Rzx)$$

vara sanna i tolkningen?
b) Om sentenserna är sanna i tolkningen, måste $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation?
Ge i vardera fallet motexempel eller informellt (men bindande) bevis.

9) Låt p, q och r vara sentenser.
a) Om $p \leftrightarrow q \vDash q \vee r$, måste då $q \leftrightarrow r \vDash p \,\&\, r$?
b) Omvänt, om $q \leftrightarrow r \vDash p \,\&\, r$, måste $p \leftrightarrow q \vDash q \vee r$?
Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, S(0) * x = x$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion i varianten S5 av modallogik (dvs den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Box\,(A \rightarrow B),\ \Diamond\,(\Box \sim A \rightarrow B)\ \vdash_{S5}\ \Diamond B.$$

SI-reglerna på formelbladet får användas.

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Diamond\, \forall x\, Gx,\ \Diamond\, \exists x\, Fx,\ \Diamond\,(\exists x\, Hx \,\&\, \forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx))\ \nvDash_{S5}\ \Diamond\, \exists x\, Gx.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$A \rightarrow C,\ B \rightarrow \sim C\ \vDash_I\ B \rightarrow \sim A.$$

Sambandet skall visas med ett resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\exists x \sim Fx,\ \exists x\, Fx \rightarrow A\ \nvDash_I\ \forall x\,(\sim Fx \vee A).$$

15) Låt Γ, Δ och Θ vara mängder av sentenser i första ordningens predikatlogik, sådana att varje modell för Γ (dvs tolkning som gör varje $p \in \Gamma$ sann) gör minst en sentens i Δ sann eller minst en sentens i Θ falsk (eller båda).
Visa att Γ, Δ och Θ har **ändliga** delmängder Γ', Δ' resp. Θ' med motsvarande egenskap.

16) Är följande sentens i andra ordningens predikatlogik en tautologi, betingat sann eller en kontradiktion? Motivera ditt svar ordentligt.

$$\forall u\, \exists X\, \forall x\, (u(u(x)) = u(x) \leftrightarrow Xu(x))$$

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.