Institutionen för matematik
KTH
J.Kristoferson, B.Ek

Lösningar till tentamen 5B1928 Logik för IT och D, 14 december 2005

1) A säger: C är kung, B säger: A är kung, C säger: jag är kung. A kan inte vara kungen, ty då vore hans påstående falskt. Vi finner då att B inte heller kan vara kung. Alltså är C kung, vilket stämmer med hans påstående. Alltså är A:s påstående sant, vilket visar att han måste vara blar. Återstår att konstatera att narren måste vara B, vilket stämmer med hans påstående.
Svar: A är blar, B narr och C kung.

2) Att visa: $B \to C,\ \sim(A \,\&\, C)\ \vdash\ A \to \sim B$.

1	(1)	$B \to C$	premiss
2	(2)	$\sim(A \,\&\, C)$	premiss
3	(3)	A	antagande
4	(4)	B	antagande
1,4	(5)	C	1,4 →E
1,3,4	(6)	$A \,\&\, C$	3,5 &I
1,2,3,4	(7)	$\curlywedge$	2,6 ∼E
1,2,3	(8)	$\sim B$	4,7 ∼I
1,2	(9)	$A \to \sim B$	3,8 →I

Slutsatsen på rad (9) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), så **härledningen är klar**.

3) För att avgöra om $\forall x\, Px \ \vee\ \sim \exists x\, Px \ \vDash\ \forall x \forall y\, (Px \to Py)$ gäller, söker vi med tablåmetoden ett motexempel, dvs en tolkning som gör premissen sann och slutsatsen falsk:

I tablån växlar faserna enligt:

satslogiska	1 ; 5
$\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$	2,3
$\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$	4

$\mathbb{T}:$	$\forall x\, Px \to \exists x\, Qx$	$\surd_1$
$\mathbb{F}:$	$\exists x\, (Px \to Qx)$	a_4

${}_1\mathbb{F}:$	$\forall x\, Px$	$\surd_2$	${}_1\mathbb{T}:$	$\exists x\, Qx$	$\surd_3$
${}_4\mathbb{F}:$	Pa	$\surd_9$	${}_3\mathbb{T}:$	Qa	$\surd_{4:b}$
${}_4\mathbb{F}:$	$Pa \to Qa$	$\surd_5$	${}_3\mathbb{F}:$	$(Pa \to Qa)$	$\surd_5$
${}_5\mathbb{T}:$	Pa		${}_5\mathbb{T}:$	Pa	
${}_9\mathbb{F}:$	Qa		${}_9\mathbb{F}:$	Qa	
	$+$			$+$	

Tablån sluter sig, så **påståendet gäller**.

4) Att visa: $\exists x\, (Px \to Qx)\ \vdash\ \forall x\, Px \to \exists x\, Qx$.
Strategi: Anta $\forall x\, Px$ och anta $Pa \to Qa$ (för ∃E). Vi härleder Qa, och sedan med ∃I $\exists x\, Qx$, varpå ∃E fungerar etc.

1	(1)	$\exists x\, (Px \to Qx)$	premiss	
2	(2)	$\forall x\, Px$	antagande	
3	(3)	$Pa \to Qa$	antagande	
2	(4)	Pa	2 ∀E	
2,3	(5)	Qa	3,4 ∀E	
2,3	(6)	$\exists x\, Qx$	5 ∃I	
1,2	(7)	$\exists x\, Qx$	1,3,6 ∃E	[a inte i (1),(2),(6)]
1	(8)	$\forall x\, Px \to \exists x\, Qx$	2,7 →I	

Slutsatsen på rad (8) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

5) 1. ”Varje kung avskyr alla andra kungar.”
dvs ”För varje x gäller att om x är kung, så gäller för alla y, att om y är kung och är skild från x, så avskyr x y.”
så **Svar**: $\forall x\,(Kx \rightarrow \forall y\,((Ky \,\&\, y \neq x) \rightarrow Axy))$

2. ”Ingen narr avskyr alla kungar som avskyr sig själv.”
dvs ”Det finns inget x sådant att x är narr och för alla y gäller att om y är kung och y avskyr y, så avskyr x y.”
så **Svar**: $\sim\exists x\,(Nx \,\&\, \forall y\,((Ky \,\&\, Ayy) \rightarrow Axy))$
Logiskt ekvivalenta varianter är förstås möjliga.

6) Vi skall visa att $\forall x\,(Rxa \vee \forall y \sim Rxy)$, $\forall x\,\exists y\,(x \neq y \,\&\, Rxy)$, $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz) \not\models \forall x\,Rxx$. Påståendet visas av en tolkning som gör de vänstra sentenserna sanna och den högra falsk. Genom att rita riktade grafer eller på annat sätt finner vi att tolkningen
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\beta)(\beta,\alpha), (\gamma,\alpha), (\gamma,\beta)\}$ gör

- $\forall x\,(Rxa \vee \forall y \sim Rxy)$ **sann**, ty Raa, Rba och Rca är alla sanna
- $\forall x\,\exists y\,(x \neq y \,\&\, Rxy)$ **sann**, ty Rab, Rba och Rca är alla sanna
- $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz)$ **sann**, ty i alla fall där Rtu och Ruv är sanna är också Rtv sann (kontrollera tio fall)
- $\forall x\,Rxx$ **falsk**, ty Rcc är falsk.

Saken är klar.

7) Att visa: $\forall x\,\forall y\,(Pxy \rightarrow \sim Pyx)$, $\exists x\,\exists y\,Pxy \;\vdash\; \exists x\,\exists y\,x \neq y$.
Idé: Två antaganden för $\exists$E ger oss Pab. Antag nu $a = b$. Vi härleder Pbb, varefter vi med hjälp av första premissen får en motsägelse. Detta ger $a \neq b$, varpå två $\exists$I ger $\exists x\,\exists y\,x \neq y$. Två $\exists$E avslutar sedan härledningen.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,(Pxy \rightarrow \sim Pyx)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\exists y\,Pxy$	premiss		
3	(3)	$\exists y\,Pay$	antagande		
4	(4)	Pab	antagande		
5	(5)	$a = b$	antagande		
4,5	(6)	Pbb	4,5	=E	
1	(7)	$\forall y\,(Pby \rightarrow \sim Pyb)$	1	$\forall$E	
1	(8)	$Pbb \rightarrow \sim Pbb$	7	$\forall$E	
1,4,5	(9)	$\sim Pbb$	8,6	$\rightarrow$E	
1,4,5	(10)	$\curlywedge$	9,6	$\sim$E	
1,4	(11)	$a \neq b$	5,10	$\sim$I	
1,4	(12)	$\exists y\,a \neq y$	11	$\exists$I	
1,4	(13)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	12	$\exists$I	
1,3	(14)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	3,4,13	$\exists$E	[b inte i (1),(3),(13)]
1,2	(15)	$\exists x\,\exists y\,x \neq y$	2,3,14	$\exists$E	[a inte i (1),(2),(14)]

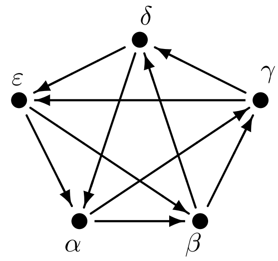
Slutsatsen på rad (15) beror bara av premisserna på rad (1) och (2), så **saken är klar**.

8) Se nästa sida.

9) Vi betraktar påståendena $\quad \alpha) \quad p \models q \;\Rightarrow\; p \models r \quad$ och $\quad \beta) \quad p \models q \rightarrow r$.
Om vi t.ex. tar $p = \sim\curlywedge$, $q = A$, och $R = \curlywedge$, så blir $\alpha)$ uppfyllt (eftersom $p \models q$ inte gäller, vilket framgår av tolkning där A är falsk), medan $\beta)$ ej blir uppfyllt (vilket framgår av tolkning där A är sann).
Anta å andra sidan att $\beta)$ är uppfyllt, dvs att $p \models q \rightarrow r$ gäller. Om nu $p \models q$ gäller, så blir både $q \rightarrow r$ och q sanna, och därmed r sann, i varje tolkning som gör p sann, varför $p \models r$ gäller, och alltså $\alpha)$ blir uppfyllt.

SVAR: $\alpha) \Rightarrow \beta)$ **gäller inte,** $\beta) \Rightarrow \alpha)$ **gäller.**

8) Vi söker en tolkning som gör både
$\forall x\,\exists y\,\exists z\,(Rxy \;\;\&\;\; Rxz \;\;\&\;\; x \neq y \;\;\&\;\; x \neq z \;\;\&\;\; y \neq z)$ och
$\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow \sim Ryx)$ sann.
Den första sentensen säger, uttryckt med "punkter och pilar", att det från varje punkt går minst två pilar till andra punkter, den andra att inga pilar är dubbelriktade.
Det räcker tydligen att som D ta fem personer som sitter kring ett bord och låta Rxy ges av "Ref(x) har Ref(y) högst två steg till höger om sig".



Mer abstrakt: $D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$,
$\mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\beta,\delta\rangle, \langle\gamma,\delta\rangle, \langle\gamma,\varepsilon\rangle, \langle\delta,\varepsilon\rangle, \langle\delta,\alpha\rangle, \langle\varepsilon,\alpha\rangle, \langle\varepsilon,\beta\rangle\}$ (se fig.)
Denna tolkning gör tydligen båda sentenserna sanna. Med oändlig domän finns t.ex. tolkningen $D = \mathbb{N}$ (naturliga talen) och R tolkad som $<$.
(Att det behövs minst 5 element i domänen för att göra båda sentenserna sanna ses av att det för en domän med n element måste vara minst $2n$ pilar (två från varje element) och att det finns $\frac{n(n-1)}{2}$ st par av olika element. $2n \leq \frac{n(n-1)}{2}$ ger $5 \leq n$ (då $n > 0$).)

10) Låt ϕx vara formeln $S(x) \neq x$. Vi skall visa $\forall x\,\phi x$.
Enligt axiom P3 gäller ($\forall$E) $S(0) \neq 0$, dvs $\phi 0$.
Enligt axiom P1 gäller ($\forall$E två gånger) $S(S(a)) = S(a) \rightarrow S(a) = a$ och alltså (med SI(MT)) att $S(a) \neq a \rightarrow S(S(a)) \neq S(a)$, dvs $\phi a \rightarrow \phi S(a)$. Eftersom detta gäller för alla a, fås ($\forall$I) $\forall x\,(\phi x \rightarrow \phi S(x))$.
Så $\phi 0 \,\&\, \forall x\,(\phi x \rightarrow \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) $\forall x\,\phi x$, dvs det vi skulle visa.

11) Vi skall visa att $\Box(\Diamond A \rightarrow B) \vdash_{S5} \Box(A \rightarrow \Box B)$.
Idé: Antag A och försök härleda $\Box B$ och få $A \rightarrow \Box B$ med beroende endast på premissen, som är F.M. (fullständigt modaliserad). Från A fås $\Diamond A$ och därefter, med användning av premissen, B. Här finns emellertid ett beroende på antagandet A som inte är F.M., så vi kan inte nu härleda $\Box B$. Situationen räddas av att efter härledningen av $\Diamond A$ anta $\Diamond A$ och gå via en max-formel $\Diamond A \rightarrow \Box B$.

1	(1)	$\Box(\Diamond A \rightarrow B)$	premiss		
2	(2)	A	antagande		
2	(3)	$\Diamond A$	2	$\Diamond$I	
4	(4)	$\Diamond A$	antagande		
1	(5)	$\Diamond A \rightarrow B$	1	$\Box$E	
1,4	(6)	B	5,4	$\rightarrow$E	
1,4	(7)	$\Box B$	6	$\Box$I	[(1) och (4) fullt modaliserade]
1	(8)	$\Diamond A \rightarrow \Box B$	4,7	$\rightarrow$I	
1,2	(9)	$\Box B$	8,3	$\rightarrow$E	
1	(10)	$A \rightarrow \Box B$	3,7	$\rightarrow$I	
1	(11)	$\Box(A \rightarrow \Box B)$	10	$\Box$I	[(1) fullt modaliserad]

Eftersom slutsatsen på sista raden bara beror av premissen på rad (1), är **härledningen klar**.

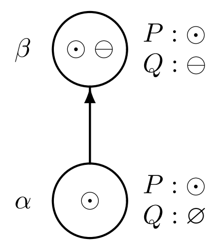
12) Vi skall visa att $\Box\,\exists x\,(x = x),\ \forall x\,\Box Px,\ \Diamond\forall x\,\Box Qx \nvDash_{S5} \Box\,\exists x\,(Px \rightarrow Qx)$.
Vi söker alltså en tolkning som gör premisserna sanna och den högra sentensen falsk. Att den högra sentensen är falsk betyder att det finns en värld, pröva t.ex. med w^*, där $\exists x\,(Px \rightarrow Qx)$ är falsk, dvs för varje t i $w^*(D)$ är Pt sann och Qt falsk. Den första premissen säger att $w(D)$ är icke-tom för alla världar w. Enligt premiss två är Pt sann i alla världar för alla t i $w^*(D)$. Den tredje premissen säger att det finns någon värld u sådan att Qt är sann i alla världar för alla t i $u(D)$.

Betrakta alltså tolkningen: $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha, \beta\},\quad w^*(D) = \{\alpha\},\ u(D) = \{\beta\}$,
$w^*[P] = u[P] = \{\alpha\},\ w^*[Q] = u[Q] = \{\beta\}$.
Den visar påståendet, ty i den gäller att

- $\Box\,\exists x\,(x = x)$ är **sann**, ty $\exists x\,(x = x)$ gäller i alla världar, ty $a = a$ gäller i w^* och $\alpha \in w^*(D)$, och $b = b$ gäller i u och $\beta \in u(D)$,
- $\forall x\,\Box Px$ är **sann**, ty $w^*(D) = \{\alpha\}$ och Pa är sann i alla världar.
- $\Diamond\forall x\,\Box Qx$ är **sann**, ty $\forall x\,\Box Qx$ är sann i u, ty $u(D) = \{\beta\}$ och Qb är sann i alla världar.
- $\Box\,\exists x\,(Px \to Qx)$ är **falsk**, ty $\exists x\,(Px \to Qx)$ är falsk i w^*, ty $w^*(D) = \{\alpha\}$ och $Pa \to Qa$ är falsk i w^*, ty Pa är sann och Qa falsk i w^*.

13) Vi skall visa att $\sim A \vee B \models_I A \to B$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash \sim A \vee B$. Det betyder att $\alpha \Vdash \sim A$ eller $\alpha \Vdash B$. I det första fallet gäller $\sigma \nVdash A$ för alla $\sigma \in S$ och i det andra fallet gäller $\sigma \Vdash B$ för alla $\sigma \in S$. Således gäller för varje $\sigma \in S$ att $\sigma \Vdash A \;\Rightarrow\; \sigma \Vdash B$, och detta betyder att $\alpha \Vdash A \to B$. Vi har därmed visat $\sim A \vee B \models_I A \to B$, och **saken är klar**.

14) En härledning $\forall x\,\exists y\,(Px \vee Qy) \vdash \exists y\,\forall x\,(Px \vee Qy)$ med naturlig deduktion utan regeln DN, skulle vara en härledning i NJ, ett sunt system för intuitionistisk logik. Det skulle alltså gälla $\forall x\,\exists y\,(Px \vee Qy) \models_I \exists y\,\forall x\,(Px \vee Qy)$.
Men tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$,
$\mathrm{dom}(\alpha) = \{\odot\}$, $\mathrm{dom}(\beta) = \{\odot, \ominus\}$,
$\mathrm{warr}(\alpha) = \{\langle\text{‘}P\text{’}, \odot\rangle\}$, $\mathrm{warr}(\beta) = \{\langle\text{‘}P\text{’}, \odot\rangle, \langle\text{‘}Q\text{’}, \ominus\rangle\}$ ger:



- $\alpha \Vdash \forall x\,\exists y\,(Px \vee Qy)$,
  ty $\alpha, \beta \Vdash \exists y\,(P\odot \vee Qy)$ och $\beta \Vdash \exists y\,(P\ominus \vee Qy)$,
  ty $\alpha \Vdash P\odot \vee Q\odot$, ty $\alpha \Vdash P\odot$
  och $\beta \Vdash P\odot \vee Q\ominus$ och $\beta \Vdash P\ominus \vee Q\ominus$, ty $\beta \Vdash Q\ominus$
- $\alpha \nVdash \exists y\,\forall x\,(Px \vee Qy)$,
  ty $\alpha \nVdash \forall x\,(Px \vee Q\odot)$, ty $\beta \nVdash P\ominus \vee Q\odot$.

visar att $\forall x\,\exists y\,(Px \vee Qy) \not\models_I \exists y\,\forall x\,(Px \vee Qy)$ och **härledningen måste använda DN**.

15) Γ har ingen modell, eftersom varje tolkning gör någon sentens i Γ falsk. Alltså finns enligt kompakthetssatsen någon ändlig delmängd Γ_1 av Γ som saknar modell, dvs varje tolkning gör någon sentens i Γ_1 falsk. $(\sim)\Gamma$ har inte heller någon modell, eftersom varje tolkning gör någon sentens i Γ sann, dvs någon sentens i $(\sim)\Gamma$ falsk ($(\sim)\Gamma$ är den sentensmängd som fås genom att negera alla sentenser i Γ). Alltså finns någon ändlig delmängd Γ_2 av Γ sådan att $(\sim)\Gamma_2$ saknar modell, dvs varje tolkning gör någon sentens i $(\sim)\Gamma_2$ falsk, dvs någon sentens i Γ_2 sann. Alltså är $\Gamma' = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ en ändlig delmängd av Γ sådan att varje tolkning gör någon sentens i Γ' sann och någon falsk. **Saken är klar**.

16) Den givna sentensen $\forall X\,\exists u\,\forall x\,(u(u(x)) \neq x \leftrightarrow Xx)$ är sann precis om det för varje delmängd $\mathcal{M}$ $(= \mathrm{Ext}(X))$ till domänen D finns en funktion f sådan att

$$f(f(x)) \neq x \iff x \in \mathcal{M} \tag{1}$$

Om $\mathcal{M}$ är en *äkta* delmängd av D (dvs $\mathcal{M}$ är inte hela D), så definierar vi f så här:
ta ett element $a \in D \setminus \mathcal{M}$ och sätt $f(x) = \begin{cases} a \text{ om } x \in \mathcal{M} \\ x \text{ om } x \in D \setminus \mathcal{M} \end{cases}$. Då gäller tydligen (1), och detta fungerar för varje D.
Återstår att se om vi kan hitta en funktion f som uppfyller (1) då $\mathcal{M} = \mathcal{D}$. Det går inte om $|D| = 1$ eller 2 ($|D|$ betecknar antalet element i D). Ty då finns antingen en fixpunkt x (dvs $f(x) = x$) och därmed en punkt som uppfyller $f(f(x)) = x$, eller så har vi situationen $f(a) = b$ och $f(b) = a$, varvid $f(f(x)) = x$ gäller för $x = a$ och $x = b$.
Om $|D| \geq 3$, så definierar vi f så här:
välj tre element a, b, c i D och sätt $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a, f(x) = a$ för övriga x. Då gäller (1) för f, så vi får
Svar: Tolkningar med minst 3 element i domänen.