KTH Matematik
B.Ek

Lösningar tentamen 5B1928 Logik för D och IT, 25 augusti 2006

1) Vi vet att X är en av A och B och att A säger:
"B är X och hon och jag är olika sorter (en kung och en narr)."
Vi skall utröna om det går att avgöra vad X är, och vad han/hon i så fall är.
Enligt förutsättningarna finns två fall, A eller B är X.
Om A är X är B inte X, så A (dvs X) ljuger, så då **är X narr.**
Om B är X är det om A är kung sant och om A är narr falskt att A och B är olika sorter, så B (dvs X) är narr. Så också då **är X narr.**
Så **Svar: Ja, det kan avgöras, X är narr.** (Men vi vet inte om X är A eller B.)

2) Att visa: $A \vee (B \to C),\ \sim(B \to A)\ \vdash\ C$.
Idé: Den andra premissen ger $B \,\&\, \sim A$. $\sim A$ ger med den första $B \to C$ (DS), så B ger C ($\to$E).

1	(1)	$A \vee (B \to C)$	premiss	
2	(2)	$\sim(B \to A)$	premiss	
2	(3)	$B \,\&\, \sim A$	2	SI(Neg-Imp)
2	(4)	$\sim A$	3	&E
1,2	(5)	$B \to C$	1,4	SI(DS)
2	(6)	B	3	&E
1,2	(7)	C	5,6	$\to$E

Slutsatsen på rad (7) beror bara av premisserna på raderna (1) och (2), **saken är klar**.

3) För att avgöra om $\exists x Fx \to \sim Ga\ \vDash\ \forall x\,(\forall y\, Gy \to \sim Fx)$ söker vi motexempel (tolkningar som gör premissen sann och slutsatsen falsk):

I tablån växlar de tre faserna:
1. Satslogiska 1,2 ; 6,7 ;
2. $\mathbb{T}\exists, \mathbb{F}\forall$ 3 ; - ;
3. $\mathbb{T}\forall, \mathbb{F}\exists$ 4,5 ; 8 ;

(Vissa index dubbelanvända)

Tablån sluter sig, så **svar:**
Slutledningen är giltig.

$\mathbb{T}:\ \exists x Fx \to \sim Ga \quad \surd_1$
$\mathbb{F}:\ \forall x\,(\forall y\, Gy \to \sim Fx) \quad \surd_{3:b}$

${}_1\mathbb{F}$:	$\exists x\, Fx$	a_4, b_5	${}_1\mathbb{T}$:	$\sim Ga$	$\surd_2$
${}_3\mathbb{F}$:	$\forall y\, Gy \to \sim Fb$	$\surd_6$	${}_2\mathbb{F}$:	Ga	
${}_4\mathbb{F}$:	Fa		${}_3\mathbb{F}$:	$\forall y\, Gy \to \sim Fb$	$\surd_6$
${}_5\mathbb{F}$:	Fb		${}_6\mathbb{T}$:	$\forall y\, Gy$	a_8
${}_6\mathbb{T}$:	$\forall y\, Gy$		${}_6\mathbb{F}$:	$\sim Fb$	$\surd_7$
${}_6\mathbb{F}$:	$\sim Fb$	$\surd_7$	${}_7\mathbb{T}$:	Fb	
${}_7\mathbb{T}$:	Fb		${}_8\mathbb{T}$:	Ga	
	$\times$			$\times$	

4) Att visa: $\exists x\,\forall y\,(Hx \vee Ky)\ \vdash\ \forall x\,(\sim\exists y\, Hy \to Kx)$.
Idé: Antag $\sim\exists y\, Hy$ för att visa K för ett godtyckligt element. Premissen ger $\forall y\,(Ha \vee Ky)$, något a (dvs det antas för $\exists$E), så $Ha \vee Kb$, godtyckligt b. Antagandet $\sim\exists y\, Hy$ ger $\forall y \sim Hy$ och därmed $\sim Ha$, så Kb osv.

1	(1)	$\exists x\,\forall y\,(Hx \vee Ky)$	premiss		
2	(2)	$\sim\exists y\, Hy$	antagande		
3	(3)	$\forall y\,(Ha \vee Ky)$	antagande		
3	(4)	$Ha \vee Kb$	3	$\forall$E	
2	(5)	$\forall y \sim Hy$	2	SI(QS)	
2	(6)	$\sim Ha$	5	$\forall$E	
2,3	(7)	Kb	4,6	SI(DS)	
1,2	(8)	Kb	1,3,7	$\exists$E	[a inte i (1),(7),(2)]
1	(9)	$\sim\exists y\, Hy \to Kb$	2,8	$\to$I	
1	(10)	$\forall x\,(\sim\exists y\, Hy \to Kx)$	9	$\forall$I	[b inte i (1)]

Slutsatsen på rad (10) beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

5) 1. ”Anna gillar alla som gillar någon som inte gillar Anna.”
dvs ”För alla x, om det finns y så att x gillar y och y inte gillar a, så gillar a x”,
dvs ”För alla x, om det finns y så att Gxy och $\sim Gya$, så Gax”,
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\,(\exists y\,(Gxy \,\&\, {\sim} Gya) \rightarrow Gax)}$
2. ”Var och en gillar sig själv, men någon gillar också någon annan.”
dvs ”För alla x gäller att x gillar x men (dvs och) det finns y så att det finns z så att z inte är y och y gillar z”,
dvs ”För alla x gäller Gxx och det finns y så att det finns z så att $z \neq y$ och Gyz.”
så **svar**: $\boldsymbol{\forall x\, Gxx \,\&\, \exists y\, \exists z\,(z \neq y \,\&\, Gyz)}$ ($\forall x\, Gxx \,\&\, \exists x\, \exists y\,(y \neq x \,\&\, Gxy)$ går lika bra.)
I båda fallen är förstås fler logiskt ekvivalenta varianter möjliga.

6) För att visa att $\exists x\,\exists y\, Rxy,\ \forall x\,\forall y\,((Rxy \,\&\, x \neq y) \rightarrow \sim(\exists z\, Ryz \rightarrow Ryx)) \ \nvDash\ \exists x\, Rxx$ skall vi finna en tolkning som gör premisserna sanna och den tänkta slutsatsen falsk.
Uttryckt i ”punkter och pilar” är $\exists x\,\exists y\, Rxy$ sann precis om det finns minst en pil, medan $\forall x\,\forall y\,((Rxy \ \&\ x \neq y) \rightarrow \sim(\exists z\, Ryz \rightarrow Ryx))$ är sann precis om det för varje par av olika punkter α, β med en pil från α till β finns (minst) en pil från β och ingen pil från β till α ($\sim(\exists z\, Rbz \rightarrow Rba)$ är ju sann precis om $\exists z\, Rbz$ är sann och Rba är falsk).
$\exists x\, Rxx$ (som skall undvikas) betyder att det går en pil från någon punkt till den själv.
Genom att pröva med $1, 2, 3, \ldots$ element, finner man tolkningen (med minimal domän):
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle\}$ (se fig. vid uppgift 16).
Den gör ju

- $\boldsymbol{\exists x\,\exists y\, Rxy}$ **sann**, ty Rab är sann (ty $\langle\alpha,\beta\rangle \in \mathrm{Ext}(R)$)
- $\boldsymbol{\forall x\,\forall y\,((Rxy \,\&\, x \neq y) \rightarrow \sim(\exists z\, Ryz \rightarrow Ryx))}$ **sann**, ty de enda xy som gör VL i implikationen sann är ab, bc, ca (ty bara $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle \in \mathrm{Ext}(R)$) och för dessa par är $\sim(\exists z\, Ryz \rightarrow Ryx)$ sann, ty $\exists z\, Ryz \rightarrow Ryx$ är falsk, ty $\exists z\, Rbz, \exists z\, Rcz, \exists z\, Raz$ är sanna (ty Rbc, Rca, Rab sanna) och Rba, Rcb, Rac falska
- $\boldsymbol{\exists x\, Rxx}$ **falsk**, ty Raa, Rbb, Rcc är alla falska (ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle \notin \mathrm{Ext}(R)$),

så **saken är klar.**

7) Att visa: $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(Pxz \leftrightarrow y = z) \ \vdash\ \forall x\,\forall y\,(\exists z\,(Pzx \,\&\, Pzy) \rightarrow x = y)$.
Premissen: det går precis en pil från varje punkt, slutsatsen: det går inte från någon två pilar.
Idé: Vi antar $\exists z\,(Pza \,\&\, Pzb)$ och visar $a = b$. Antagandet ger $Pca \,\&\, Pcb$ för något c (dvs det antas för $\exists$E). Premissen ger $\forall z\,(Pcz \leftrightarrow d = z)$, något d (antagande igen), så $d = a$ och $d = b$ osv.

1	(1)	$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(Pxz \leftrightarrow y = z)$	premiss		
2	(2)	$\exists z\,(Pza \,\&\, Pzb)$	antagande		
3	(3)	$Pca \,\&\, Pcb$	antagande		
3	(4)	Pca	3	&E	
3	(5)	Pcb	3	&E	
1	(6)	$\exists y\,\forall z\,(Pcz \leftrightarrow y = z)$	1	$\forall$E	
7	(7)	$\forall z\,(Pcz \leftrightarrow d = z)$	antagande		
7	(8)	$Pca \leftrightarrow d = a$	7	$\forall$E	
7	(9)	$Pcb \leftrightarrow d = b$	7	$\forall$E	
3,7	(10)	$d = a$	8,4	$\leftrightarrow$E	
3,7	(11)	$d = b$	9,5	$\leftrightarrow$E	
3,7	(12)	$a = b$	10,11	$=$E	
1,3	(13)	$a = b$	6,7,12	$\exists$E	[d inte i (6),(12),(3)]
1,2	(14)	$a = b$	2,3,13	$\exists$E	[c inte i (2),(13),(1)]
1	(15)	$\exists z\,(Pza \,\&\, Pzb) \rightarrow a = b$	2,14	$\rightarrow$I	
1	(16)	$\forall y\,(\exists z\,(Pza \,\&\, Pzy) \rightarrow a = y)$	15	$\forall$I	[b inte i (1)]
1	(17)	$\forall x\,\forall y\,(\exists z\,(Pzx \,\&\, Pzy) \rightarrow x = y)$	16	$\forall$I	[a inte i (1)]

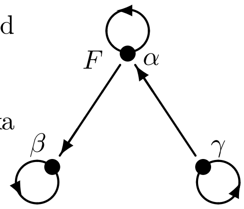
Slutsatsen på rad (17) beror bara av premissen på rad (1), **saken är klar**.

8) Se nästa sida.

9) Vi har: $\alpha)\ p \nvDash q$, $\quad \beta)\ p \vDash {\sim} q$.
α) betyder precis att det finns **minst en** tolkning som gör p sann och q falsk.
β) betyder precis att det inte finns någon tolkning som gör p sann och $\sim q$ falsk (dvs q sann), dvs att i **varje** tolkning är minst en av p och q falsk.
Valet $p : A, q : B$ gör α) sann ($A \nvDash B$ gäller) men β) falsk ($A \vDash {\sim} B$ gäller inte), så $\alpha) \ \not\Rightarrow\ \beta)$.
Valet $p : \curlywedge, q$ godtycklig gör α) falsk ($\curlywedge \vDash q$ gäller) och β) sann ($\curlywedge \vDash {\sim} q$ gäller), så $\beta) \ \not\Rightarrow\ \alpha)$.
Alltså **svaret:** $\boldsymbol{\alpha) \not\Rightarrow \beta), \quad \beta) \not\Rightarrow \alpha).}$

8) Den givna sentensen $\forall x\,(\exists y \sim(Qxy \leftrightarrow Qyx)\ \&\ \forall y\,(Qxy \vee Qyy))$ är tydligen sann precis om $p_1 : \forall x\, \exists y \sim(Qxy \leftrightarrow Qyx)$ och $p_2 : \forall x\, \forall y\,(Qxy \vee Qyy)$ båda är sanna. p_1 säger, uttryckt med ”punkter och pilar”, att det för varje punkt finns en (annan) punkt så att det går en pil i precis en riktning mellan de två punkterna. p_2 säger att det givet två punkter finns en pil från minst en av dem till punkt nummer två.
Relationen $\mathcal{Q}$ som gör den givna sentensen sann är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Qxx$ är sann, ty för godtyckligt a ger p_2 (med $\forall$E) att $\forall y\,(Qay \vee Qyy)$, så ($\forall$E igen) $Qaa \vee Qaa$, dvs Qaa
- **säkert inte symmetrisk**, dvs $\forall x\, \forall y\,(Qxy \rightarrow Qyx)$ är falsk, ty p_1 ger att det för varje a finns b så att Qab och Qba har olika sanningsvärden, dvs en av $Qab \rightarrow Qba$ och $Qba \rightarrow Qab$ är falsk
- **inte säkert transitiv**, dvs $\forall x\, \forall y\, \forall z\,((Qxy\ \&\ Qyz) \rightarrow Qxz)$ behöver inte vara sann, ty



en tolkning som gör den givna sentensen sann men inte gör $\mathcal{Q}$ transitiv ges av (se fig.):
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathrm{Ext}(Q) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$.
Den gör ju p_1 och p_2 sanna, men inte $(Qca\ \&\ Qab) \rightarrow Qcb$, ty Qca, Qab är sanna i tolkningen, men inte Qcb.
Svar: $\mathcal{Q}$ är reflexiv, men den är inte symmetrisk och behöver inte vara transitiv.

9) Se föregående sida.

10) Vi skall visa $\forall x\, \phi x$, där ϕx är $x + x \neq S(0)$. Vi får använda $\forall x\, \forall y\, x + y = y + x$.
$\phi 0$ gäller, eftersom $0 + 0 \overset{\mathrm{P3}}{=} 0 \overset{\mathrm{P2}}{\neq} S(0)$.
Antag att ϕa gäller, dvs $a + a \neq S(0)$ (vi kommer inte att behöva antagandet).
Då fås $S(a) + S(a) \overset{\mathrm{P4}}{=} S(S(a) + a) \overset{\text{givna}}{=} S(a + S(a)) \overset{\mathrm{P4}}{=} S(S(a + a))$, men $S(a + a) \overset{\mathrm{P2}}{\neq} 0$ och därmed (enligt P1) $S(S(a + a)) \neq S(0)$, så $\phi S(a)$.
Därmed gäller $\phi a \rightarrow \phi S(a)$ för alla a, så $\forall x\,(\phi x \rightarrow \phi S(x))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall x\,(\phi x \rightarrow \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$) gäller då $\forall x\, \phi x$, dvs det önskade $\boldsymbol{\forall x\, x + x \neq S(0)}$, så **saken är klar.**

11) Vi skall visa att $\Diamond(A \vee \Box B) \vdash_{S5} \Box(\Diamond A \vee B)$.
Idé (semantiskt:) Enligt premissen är $A \vee \Box B$ sann i någon värld. Om A är det, är $\Diamond A$, och därmed $\Diamond A \vee B$ sann i alla världar, så slutsatsen. Om $\Box B$ är sann är B, och därmed $\Diamond A \vee B$, sann i alla världar, så slutsatsen. Tvåfallsresonemang, beviset kan ske genom att anta motsatsen och sikta mot DN, eller med en maximumformal ($\Diamond A$). Nedanstående är ett alternativ.

1	(1)	$\Diamond(A \vee \Box B)$	premiss		
2	(2)	$A \vee \Box B$	antagande		
3	(3)	A	antagande		
3	(4)	$\Diamond A$	3	$\Diamond$I	
3	(5)	$\Diamond A \vee \Box B$	4	$\vee$I	
6	(6)	$\Box B$	antagande		
6	(7)	$\Diamond A \vee \Box B$	6	$\vee$I	
2	(8)	$\Diamond A \vee \Box B$	2,3,5,6,7	$\vee$E	
1	(9)	$\Diamond A \vee \Box B$	1,2,8	$\Diamond$E	[(8) fullt modaliserad]
10	(10)	$\Diamond A$	antagande		
10	(11)	$\Diamond A \vee B$	10	$\vee$I	
12	(12)	$\Box B$	antagande		
12	(13)	B	12	$\Box$E	
12	(14)	$\Diamond A \vee B$	13	$\vee$I	
1	(15)	$\Diamond A \vee B$	9,10,11,12,14	$\vee$E	
1	(16)	$\Box(\Diamond A \vee B)$	15	$\Box$I	[(1) fullt modaliserad]

Slutsatsen på sista raden beror bara av premissen på rad (1), så **saken är klar**.

12) Vi skall visa att $\Box\,\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy \ \nvDash_{S5}\ \Diamond\,\forall y\,\Box\,\exists x\,Pxy$.
Vi söker alltså en tolkning som gör $\Box\,\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy$ sann och $\Diamond\,\forall y\,\Box\,\exists x\,Pxy$ falsk, dvs som gör $\sim\Diamond\,\forall y\,\Box\,\exists x\,Pxy \equiv \Box\,\exists y\,\Diamond\,\forall x \sim Pxy$ sann.
Om det bara finns en värld, $|\mathcal{W}| = 1$, blir påståendet ekvivalent med $\exists x\,\forall y\,Pxy \ \nvDash\ \forall y\,\exists x\,Pxy$, vilket inte gäller. Om det bara finns ett element (som måste finnas i alla världar, ty $\Box\,\exists x\,\ldots$ är sant), $|D| = 1$, svarar påståendet mot $\Box\,\Diamond\,A \ \nvDash\ \Diamond\,\Box\,A$, vilket gäller.
Tolkningen $\mathcal{W} = \{w^*, u\},\ D = \{\alpha\},\ w^*(D) = u(D) = \{\alpha\}, w^*[P] = \{\langle\alpha, \alpha\rangle\},\ u[P] = \varnothing$ visar påståendet, ty den gör

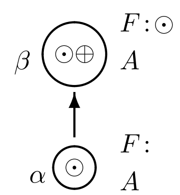
- $\boldsymbol{\Box\,\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy}$ **sann**, ty $w^*[\Box\,\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy] = 1$,
  ty $w^*, u[\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy] = 1$, ty $w^*, u[\Diamond\,\forall y\,Pay] = 1$,
  ty $w^*[\forall y\,Pay] = 1$, ty $w^*[Paa] = 1$ ($\langle\alpha, \alpha\rangle \in w^*[P]$)
- $\boldsymbol{\Diamond\,\forall y\,\Box\,\exists x\,Pxy}$ **falsk**, dvs $\Box\,\exists y\,\Diamond\,\forall x \sim Pxy$ sann, ty $w^*[\Box\,\exists y\,\Diamond\,\forall x \sim Pxy] = 1$,
  ty $w^*, u[\exists y\,\Diamond\,\forall x \sim Pxy] = 1$, ty $w^*, u[\Diamond\,\forall x \sim Pxa] = 1$,
  ty $u[\forall x \sim Pxa] = 1$, ty $u[\sim Paa] = 1$, ty $u[Paa] = 0$ ($\langle\alpha, \alpha\rangle \notin u[P]$)

Saken är klar, vi har visat $\boldsymbol{\Box\,\exists x\,\Diamond\,\forall y\,Pxy \ \nvDash_{S5}\ \Diamond\,\forall y\,\Box\,\exists x\,Pxy}$.

13) Vi skall visa att $\sim(A \rightarrow \sim B)\ \vDash_I\ \sim\sim(A\,\&\,B)$.
Låt som vanligt S vara mängden av informationstillstånd, med rot α och ordning $\leq$, i en intuitionistisk tolkning.
Antag att $\alpha \Vdash \sim(A \rightarrow \sim B)$. Det betyder precis att för alla $\sigma \in S$ gäller $\sigma \nVdash A \rightarrow \sim B$. Det i sin tur betyder att det finns $\tau \in S$, $\sigma \leq \tau$, med $\tau \Vdash A$, $\tau \nVdash \sim B$, dvs det finns $\upsilon \in S$, $\tau \leq \upsilon$, med $\upsilon \Vdash A$ (ty $\tau \Vdash A$) och $\upsilon \Vdash B$, så $\upsilon \Vdash A\ \&\ B$. Eftersom $\sigma \leq \upsilon$ betyder det att $\sigma \nVdash \sim(A\,\&\,B)$, så ($\sigma$ var godtyckligt) $\alpha \Vdash \sim\sim(A\,\&\,B)$.
Saken är klar, vi har visat $\boldsymbol{\sim(A \rightarrow \sim B)\ \vDash_I\ \sim\sim(A\,\&\,B)}$.

14) Vi skall visa att $\forall x\,Fx \rightarrow \sim A\ \nvDash_I\ A \rightarrow \exists x \sim Fx$ genom att finna en tolkning så att $\alpha \Vdash \forall x\,Fx \rightarrow \sim A$ och $\alpha \nVdash A \rightarrow \exists x \sim Fx$. Det första kan åstadkommas genom att $\sigma \nVdash \forall x\,Fx$, alla σ, och den andra genom att $\alpha \Vdash A$, $\alpha \nVdash \exists x \sim Fx$.
Man får med tolkningen (se fig.) $S = \{\alpha, \beta\}$, $\leqslant = \{\langle\alpha, \beta\rangle\}$, $dom(\alpha) = \{\odot\}$, $dom(\beta) = \{\odot, \oplus\}$, $warr(\alpha) = \{\text{‘}A\text{’}\}$, $warr(\beta) = \{\langle\text{‘}F\text{’}, \odot\rangle, \text{‘}A\text{’}\}$:

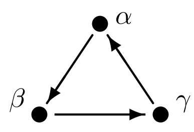
- $\alpha \Vdash \forall x\,Fx \rightarrow \sim A$, ty $\alpha, \beta \nVdash \forall x\,Fx$,
  ty $\beta \nVdash F\oplus$ (och $\alpha \leq \beta, \oplus \in dom(\beta)$)
- $\alpha \nVdash A \rightarrow \exists x \sim Fx$, ty $\alpha \Vdash A$ och $\alpha \nVdash \exists x \sim Fx$,
  ty ($dom(\alpha) = \{\odot\}$ och) $\alpha \nVdash \sim F\odot$, ty $\beta \Vdash F\odot$



Så **saken är klar**, vi har visat $\boldsymbol{\forall x\,Fx \rightarrow \sim A\ \nvDash_I\ A \rightarrow \exists x \sim Fx}$.

15) Vi vet att för varje tolkning finns sentenser $p \in \Gamma, q \in \Delta, r \in \Theta$ så att minst två av dem är sanna. Sentensmängden $\Xi = \{\sim(p\,\&\,q), \sim(p\,\&\,r), \sim(q\,\&\,r) \mid p \in \Gamma, q \in \Delta, r \in \Theta\}$ saknar således modell. Enligt kompakthetssatsen finns en ändlig delmängd $\Xi' \subseteq \Xi$ som saknar modell. Låt $\Gamma', \Delta', \Theta'$ bestå av de p, q respektive r som ingår i Ξ':s sentenser. $\Gamma', \Delta', \Theta'$ blir då ändliga och får **den önskade egenskapen. Saken är klar.**

16) Låt systemet av axiom kallas $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, med
$\boldsymbol{p_1}$: $\forall x \sim Rxx$ (R är *irreflexiv*), dvs det finns inte någon pil från en punkt till sig själv,
$\boldsymbol{p_2}$: $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\,\&\,Ryz) \rightarrow \sim Rxz)$ (R är *intransitiv*), dvs om två pilar ligger "i rad" finns ingen pil från den förstas bas till den andras spets,
$\boldsymbol{p_3}$: $\forall x\,\forall y\,((Rxy \leftrightarrow Ryx) \leftrightarrow x = y)$, dvs mellan två olika punkter går en pil åt precis ett håll,
$\boldsymbol{p_4}$: $\forall x\,\forall y\,\exists z \sim(x = z \vee y = z)$, dvs det finns minst tre punkter (element i domänen).



Låt D vara domänen för en modell för $\mathcal{A}$ och (p_4) $\alpha, \beta, \gamma \in D$ vara tre olika element, valda (p_3) så att Rab är sann. Eftersom dels Rbc eller Rcb och dels Rca eller Rac är sanna (p_3), finns det två pilar "i rad" ($\langle Rab, Rbc\rangle$, $\langle Rca, Rab\rangle$ eller $\langle Rac, Rcb\rangle$) och p_2 bestämmer den tredje pilens riktning (se fig.). Det finns (p_1, p_3) inga andra pilar mellan α, β, γ.
Om det finns ytterligare ett element, $\delta \in D$, måste (som nyss, men för α, β, δ) Rab, Rbd, Rda vara sanna och (samma igen, nu för β, γ, δ) likaledes Rbc, Rcd, Rdb. Men enligt p_3 kan inte både Rbd och Rdb vara sanna, så det finns **inget fjärde element** i D!
Alla modeller för $\mathcal{A}$ ser alltså ut som figuren (ev. bortsett från elementens namn), de är **isomorfa** och gör samma sentenser sanna. För varje sentens p i språket gäller alltså antingen $\mathcal{A}\ \vDash\ p$ eller $\mathcal{A}\ \vDash \sim p$, så (fullständighetssatsen) antingen $\mathcal{A}\ \vdash\ p$ eller $\mathcal{A}\ \vdash \sim p$, dvs p eller $\sim p$ tillhör teorin och **teorin är fullständig, saken är klar!**