KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1928, LOGIK för D och IT
Fredagen den 25 augusti 2006

Skrivtid: 8.00–13.00.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

För godkänt krävs 13 poäng på del A. Den som har 11 eller 12 poäng på del A har rätt att delta i en kompletteringsskrivning för betyg 3.
OBS! Kompletteringsberättigade som skrivit sin elpostadress på omslaget får elektroniskt besked.
Uppgifterna ger maximalt 2 poäng var.
Kontrollskrivningar från högst en av höstterminen 2005 och vårterminen 2006 kan tillgodoräknas. Den som klarat kontrollskrivning nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och skall inte göra dem).
Ange på skrivningsomslaget vilka kontrollskrivningar du klarat.

Del A

1) Knarröpolisen söker den gäckande X. X är, som alla knarröbor, antingen kung (och talar alltid sanning) eller narr (och ljuger alltid). Man vet att X är en av (öborna) A och B.
Då A förhörs gör han följande (enda) påstående:
"B är X och hon och jag är olika sorter (en kung och en narr)."
Kan man av detta avgöra vad X är, kung eller narr? I så fall, vad är X?

2) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)
$$A \lor (B \to C),\ \sim(B \to A)\ \vdash\ C.$$

3) Använd tablåmetoden för att avgöra om
$$\exists x Fx \to \sim Ga\ \vDash\ \forall x\,(\forall y\, Gy \to \sim Fx).$$
Om det inte gäller, använd tablån för att finna ett motexempel.

4) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas)
$$\exists x\,\forall y\,(Hx \lor Ky)\ \vdash\ \forall x\,(\sim\exists y\, Hy \to Kx).$$

5) Översätt följande till predikatlogiska sentenser:
a) "Anna gillar alla som gillar någon som inte gillar Anna".
b) "Var och en gillar sig själv, men någon gillar också någon annan".
Använd följande lexikon: Gxy : "Ref(x) gillar Ref(y)", Anna är Ref(a).
Domänen antas bestå av personer.

6) Visa att
$$\exists x\,\exists y\,Rxy,\ \forall x\,\forall y\,((Rxy\ \&\ x \neq y) \to \sim(\exists z\, Ryz \to Ryx))\ \nvDash\ \exists x\, Rxx.$$

Vänd!

7) Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (Pxz \leftrightarrow y = z) \;\vdash\; \forall x\, \forall y\, (\exists z\, (Pzx \mathbin{\&} Pzy) \rightarrow x = y).$$

8) Vilka av egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet måste (den binära relationen $\mathcal{Q}$, tolkningen av) Q ha, i en tolkning som gör

$$\forall x\, (\exists y \sim (Qxy \leftrightarrow Qyx) \mathbin{\&} \forall y\, (Qxy \vee Qyy))$$

sann? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall framgå vad var och en av de tre egenskaperna innebär.

9) Betrakta påståendena α) och β) om sentenserna p och q:

$$\alpha)\;\; p \nvDash q \qquad\quad \beta)\;\; p \vDash \sim q.$$

α) säger alltså att q inte är en logisk följd av p, medan β) säger att $\sim q$ är en logisk följd av p. Gäller $\alpha) \;\Rightarrow\; \beta)$? (Dvs gäller för alla sentenser p, q att om α är sann så är också β sann?) Gäller $\beta) \;\Rightarrow\; \alpha)$? Motivera ordentligt.

10) Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, x + x \neq S(0)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Utan bevis får användas att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, \forall y\, x + y = y + x$.

Del B

Denna del ger, om del A är godkänd, betyg fyra för 4-7 poäng och betyg fem för 8-12 poäng. Uppgifterna kan ge 2 poäng var.
Uppgifterna är troligen inte ordnade efter svårighet.
Var noga med att motivera dina svar!

11) Visa med naturlig deduktion (formelbladets SI-regler får användas) i varianten S5 av modallogik (den modallogik som presenteras i kursboken) att

$$\Diamond\, (A \vee \Box\, B) \;\vdash_{S5}\; \Box\, (\Diamond\, A \vee B).$$

12) Visa att i modal predikatlogik (fortfarande variant S5)

$$\Box\, \exists x\, \Diamond\, \forall y\, Pxy \;\nvDash_{S5}\; \Diamond\, \forall y\, \Box\, \exists x\, Pxy.$$

13) Visa **med resonemang** att i intuitionistisk logik

$$\sim (A \rightarrow \sim B) \;\vDash_I\; \sim\sim (A \mathbin{\&} B).$$

Sambandet skall visas med resonemang om intuitionistiska tolkningar, det är alltså **inte** tillåtet att använda t.ex. naturlig deduktion.

14) Visa att i intuitionistisk logik

$$\forall x\, Fx \rightarrow \sim A \;\nvDash_I\; A \rightarrow \exists x \sim Fx.$$

15) Låt Γ, Δ, Θ vara sentensmängder i första ordningens predikatlogik, så att för varje tolkning innehåller minst två av dem minst en sann sentens.
Visa att det finns **ändliga** $\Gamma' \subseteq \Gamma, \Delta' \subseteq \Delta, \Theta' \subseteq \Theta$ med motsvarande egenskap.

16) Visa att axiomsystemet $\{\forall x \sim Rxx,\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \mathbin{\&} Ryz) \rightarrow \sim Rxz),\ \forall x\, \forall y\, ((Rxy \leftrightarrow Ryx) \leftrightarrow x = y),\ \forall x\, \forall y\, \exists z \sim (x = z \vee y = z)\}$ definierar en **fullständig** (i språket med R som enda icke-logiska symbol) teori.
[Ledande fråga: Hur ser modellerna för axiomen ut?]

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.