KTH Matematik | Andreas Enblom

**Tentamen i 5B1928, LOGIK för IT och D**
**Fredagen den 15 december 2006**

**Lösningsförslag**

1. Antag till att börja med att A är kung och gör ett sant påstående. Då är B:s påstående sant (eftersom om ”A är narr” är falskt så blir ”om A är narr så . . . ” sant). Alltså måste B vara kung och därmed är A:s påstående sant oavsett om C är kung eller ej (eftersom ”B är kung” är sant så är påståendet ”Om C är kung så är B kung” sant oavsett om påståendet ”C är kung” är sant eller ej). Alltså kan vi inte avgöra vad C är i detta fall.

   Antag nu istället att A är narr och gör ett falskt påstående. Då måste C vara kung och B vara narr (eftersom påståendet ”Om C är kung så är B kung” är falskt så måste ”C är kung” vara sant men ”B är kung” vara falskt). Därmed är Bs påstående falskt så A och C är narrar. Detta är omöjligt eftersom vi vet att C är kung i detta fall.

   Alltså: A och B måste vara kungar, men det går inte att avgöra vad C är.

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $A \vee \sim B$ | premiss |
| 2 | (2) | $A \to \sim C$ | premiss |
| 3 | (3) | $C$ | antagande |
| 4 | (4) | $A$ | antagande |
| 5 | (5) | $B$ | antagande |
| 2,4 | (6) | $\sim C$ | 2,4 $\to$E |
| 2,3,4 | (7) | $\curlywedge$ | 6,3 $\sim$E |
| 2,3,4 | (8) | $\sim B$ | 5,7 $\sim$I |
| 9 | (9) | $\sim B$ | antagande |
| 1,2,3 | (10) | $\sim B$ | 1,4,8,9,9 $\vee$E |
| 1,2 | (11) | $C \to \sim B$ | 1,2 $\to$I |

3.

$$\mathbb{T} : \exists x\,(Rx \to (Px \vee Qx)) \quad \surd_{1:a}$$
$$\mathbb{T} : \forall x\,(Rx \,\&\, \sim Qx) \quad {\scriptstyle 3:a\ \ 4:b}$$
$$\mathbb{F} : \forall x\, Px \quad \surd_{2:b}$$
$$1 : \mathbb{T} : Ra \to (Pa \vee Qa) \quad \surd_5$$
$$2 : \mathbb{F} : Pb$$
$$3 : \mathbb{T} : Ra \,\&\, \sim Qa \quad \surd_6$$
$$4 : \mathbb{T} : Rb \,\&\, \sim Qb \quad \surd_7$$

Vänster gren:

$$5 : \mathbb{F} : Ra$$
$$6 : \mathbb{T} : Ra$$
$$6 : \mathbb{T} : \sim Qa$$
$$\times$$

Höger gren:

$$5 : \mathbb{T} : Pa \vee Qa \quad \surd_8$$
$$6 : \mathbb{T} : Ra$$
$$6 : \mathbb{T} : \sim Qa \quad \surd_9$$
$$7 : \mathbb{T} : Rb$$
$$7 : \mathbb{T} : \sim Qb \quad \surd_{10}$$

$$8 : \mathbb{T} : Pa \qquad\qquad 8 : \mathbb{T} : Qa$$
$$9 : \mathbb{F} : Qa \qquad\qquad 9 : \mathbb{F} : Qa$$
$$10 : \mathbb{F} : Qb \qquad\qquad \times$$

Eftersom tablån inte sluter sig så gäller inte logisk följd. En tolkning som gör premisserna sanna men slutsatsen falsk utläses ur en öppen gren som

| | $P$ | $Q$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $\beta$ | $-$ | $-$ | $+$ |

det vill säga

$$D = \{\alpha, \beta\}$$
$$\mathrm{Ext}(P) = \{\alpha\}$$
$$\mathrm{Ext}(Q) = \varnothing$$
$$\mathrm{Ext}(R) = \{\alpha, \beta\}.$$

4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\forall x\,(Fx \rightarrow {\sim}Gx)$ | premiss |
| 2 | (2) | $\forall x\,Fx$ | antagande |
| 3 | (3) | $\exists x\,Gx$ | antagande |
| 4 | (4) | $Ga$ | antagande |
| 1 | (5) | $Fa \rightarrow {\sim}Ga$ | 1 $\forall$E |
| 2 | (6) | $Fa$ | 2 $\forall$E |
| 1,2 | (7) | ${\sim}Ga$ | 5,6 $\rightarrow$E |
| 1,2,4 | (8) | $\curlywedge$ | 7,4 ${\sim}$E |
| 1,2,3 | (9) | $\curlywedge$ | 3,4,8 $\exists$E ($a$ ej på rad 1,2,3,8) |
| 1,2 | (10) | ${\sim}\exists x\,Gx$ | 3,9 ${\sim}$I |
| 1 | (11) | $\forall x\,Fx \rightarrow {\sim}\exists x\,Gx$ | 2,10 $\rightarrow$I |

5. a) ”Alla maskerade banditer uppfyller ...” översätts

$$\forall x\,((Mx \,\&\, Bx) \rightarrow \ldots).$$

Att ”$x$ fruktar minst två sheriffer” översätts

$$\exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, Sy \,\&\, Sz \,\&\, Fxy \,\&\, Fxz).$$

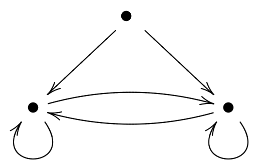
Alltså blir svaret

$$\forall x\ ((Mx \,\&\, Bx) \rightarrow \exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, Sy \,\&\, Sz \,\&\, Fxy \,\&\, Fxz))\,.$$

b) ”Det finns inte någon sheriff” översätts ${\sim}\,\exists x\,Sx$. ”Alla banditer är omaskerade” översätts $\forall x\,(Bx \rightarrow {\sim}Mx)$. ”För att $A$ är det nödvändigt att $B$” är detsamma som att $B$ är ett nödvändigt villkor för $A$ och översätts $A \rightarrow B$. Alltså blir svaret

$${\sim}\exists x\,Sx \rightarrow \forall x\,(Bx \rightarrow {\sim}Mx).$$

6. Låt oss göra en grafisk tolkning med punkter och pilar. Den första sentensen, $\exists x\,\forall y\,{\sim}Ryx$, säger att den finns en punkt till vilken det inte går några pilar. Den andra sentensen, $\forall x\,\exists y\,{\sim}Rxy$, säger att ingen punkt har en pil till alla punkter och den tredje sentensen, $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)$ säger att från varje punkt går minst två pilar. En graf som uppfyller alla dessa tre påståenden är



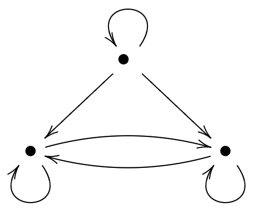
och därmed ges en modell av tolkningen

$$D = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}.$$

7.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\exists x\,\forall y\,(Rxy \lor Ryx)$ | Premiss |
| 2 | (2) | $\forall x\,\forall z\,(Rxz \to \exists y\,Ryx)$ | Premiss |
| 3 | (3) | $\forall y\,(Ray \lor Rya)$ | Antagande |
| 3 | (4) | $Rab \lor Rba$ | 3 $\forall$E |
| 5 | (5) | $Rab$ | Antagande |
| 5 | (6) | $\exists y\,Ryb$ | 5 $\exists$I |
| 7 | (7) | $Rba$ | Antagande |
| 2 | (8) | $\forall z\,(Rbz \to \exists y\,Ryb)$ | 2 $\forall$E |
| 2 | (9) | $Rba \to \exists y\,Ryb$ | 8 $\forall$E |
| 2,7 | (10) | $\exists y\,Ryb$ | 9,7 $\to$E |
| 2,3 | (11) | $\exists y\,Ryb$ | 4,5,6,7,10 $\lor$E |
| 2,3 | (12) | $\forall x\,\exists y\,Ryx$ | 11 $\forall$I ($b$ ej på rad 2,3) |
| 1,2 | (13) | $\forall x\,\exists y\,Ryx$ | 1,3,12 $\exists$E ($a$ ej på rad 1, 2, 12) |

8. Eftersom en ekvivalensrelation är en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv så gör den grafiska tolkningen med punkter och pilar frågan till den om varje graf som är reflexiv (alla punkter har en pil till sig själv), transitiv (om det går en pil från $a$ till $b$ och från $b$ till $c$ så måste det gå en pil från $a$ till $c$) och uppfyller $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)$ (från varje punkt går minst två pilar) måste vara symmetrisk (för varje pil finns en pil åt andra hållet), och att svaret är *nej* visas av följande graf som är reflexiv, transitiv, uppfyller $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)$ men inte är symmetrisk:



Svaret är alltså nej och ett motexempel ges av tolkningen

$$D = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}.$$

9. Notera först att om vi låter $p$ vara sentensen $\sim \curlywedge$ så finns det ingen tolkning i vilken sentensen $\sim(p \,\&\, p)$ är sann (den sistnämnda sentensen är ju logiskt ekvivalent med $\curlywedge$). Alltså gäller *inte* påståendet $\mathscr{R}pp$ för detta val av $p$. Alltså är relationen $\mathscr{R}$ inte reflexiv.

Vidare, tag godtyckliga sentenser $p$ och $q$ och antag att $\mathscr{R}pq$. Då finns det en tolkning i vilken sentensen $\sim(p \,\&\, q)$ är sann. I samma tolkning är naturligtvis sentensen $\sim(q \,\&\, p)$ sann och i synnerhet finns det en tolkning i vilken $\sim(q \,\&\, p)$ är sant. Detta betyder att $\mathscr{R}qp$. Alltså har vi visat att om $\mathscr{R}pq$ så $\mathscr{R}qp$, och eftersom $p$ och $q$ var godtyckliga så gäller detta för alla sentenser $p$ och $q$. Alltså är relationen $\mathscr{R}$ symmetrisk.

Till sist, låt $p$ och $r$ båda vara sentensen $\sim \curlywedge$ och låt $q$ vara sentensen $A$. Det finns uppenbarligen en tolkning där sentensen $\sim(\sim \curlywedge \,\&\, A)$ är sann (nämligen tolkningen där $A$ är falsk) och därmed gäller $\mathscr{R}pq$. På samma sätt gäller $\mathscr{R}qr$. Men däremot gäller inte $\mathscr{R}pr$ eftersom det inte finns någon tolkning där $\sim(\sim\curlywedge \,\&\, \sim\curlywedge)$ är sant. Alltså är relationen $\mathscr{R}$ inte transitiv.

10. Tag ett godtyckligt $a$. Låt oss visa med induktion att $\forall y\, S(a)+y = S(a+y)$. Låt $\phi y$ beteckna formeln $S(a) + y = S(a + y)$.

**Basfall:** Vi har att

$$S(a) + 0 \overset{\text{P3}}{=} S(a) \overset{\text{P3}}{=} S(a + 0).$$

Alltså gäller $S(a) + 0 = S(a + 0)$, det vill säga $\phi 0$.

**Induktionssteg:** Låt $b$ vara godtycklig och antag att $\phi b$ gäller, det vill säga att

$$S(a) + b = S(a + b). \qquad (*)$$

Nu följer

$$S(a) + S(b) \overset{\text{P4}}{=} S(S(a) + b) \overset{(*)}{=} S(S(a + b)) \overset{\text{P4}}{=} S(a + S(b)),$$

det vill säga att $S(a) + S(b) = S(a + S(b))$, vilket är precis $\phi S(b)$. Alltså har vi visat att $\phi b \to \phi S(b)$, och eftersom $b$ var godtycklig så följer det att $\forall y\, (\phi y \to \phi S(y))$.

Vi har alltså visat $\phi 0 \,\&\, \forall y\, (\phi y \to \phi S(y))$ och om vi nu använder induktionsprincipen (P7) så får vi att $\forall y\, \phi y$, det vill säga att

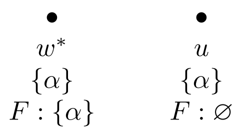
$$\forall y\, S(a) + y = S(a + y).$$

Eftersom $a$ var godtycklig så följer det att $\forall x\, \forall y\, S(x) + y = S(x + y)$.

11.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | (1) | $\Box\sim A$ | premiss |
| 2 | (2) | $\Box\sim B$ | premiss |
| 3 | (3) | $\Diamond(A \vee \Diamond B)$ | antagande |
| 4 | (4) | $A \vee \Diamond B$ | antagande |
| 5 | (5) | $A$ | antagande |
| 1 | (6) | $\sim A$ | 1 $\Box$E |
| 1,5 | (7) | $\curlywedge$ | 6,5 $\sim$E |
| 8 | (8) | $\Diamond B$ | antagande |
| 9 | (9) | $B$ | antagande |
| 2 | (10) | $\sim B$ | 2 $\Box$E |
| 2,9 | (11) | $\curlywedge$ | 10,9 $\sim$E |
| 2,8 | (12) | $\curlywedge$ | 8,9,11 $\Diamond$E (rad 2 fullt modaliserad) |
| 1,2,4 | (13) | $\curlywedge$ | 4,5,7,8,11 $\vee$E |
| 1,2,3 | (14) | $\curlywedge$ | 3,4,13 $\Diamond$E (rad 1 och 2 fullt modaliserade) |
| 1,2 | (15) | $\sim\Diamond(A \vee \Diamond B)$ | 3,14 $\sim$I |

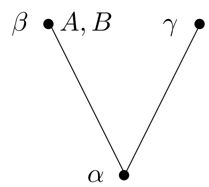
12. Betrakta följande tolkning i modal predikatlogik:




Eftersom $u(F) = \varnothing$ så är sentensen $\exists x\, Fx$ falsk i världen $u$. Det betyder att $\exists x\, Fx \to \forall x\, \Box Fx$ är sant i världen $u$. Alltså finns det en värld där detta är sant så $\Diamond(\exists x\, Fx \to \forall x\, \Box Fx)$ är sant (i den verkliga världen $w^*$).

Vidare är $\Diamond Fa$ sant i världen $u$ (eftersom $Fa$ är sant i någon värld), så $\exists x\, \Diamond Fx$ är sant i världen $u$. Men $\Box Fa$ är inte sant i världen $u$ (eftersom $Fa$ är falskt i någon värld), så $\forall x \Box Fx$ är falskt i världen $u$. Alltså är $\exists x\, \Diamond Fx \to \forall x\, \Box Fx$ falskt i världen $u$. På samma sätt visar man att $\exists x\, \Diamond Fx \to \forall x\, \Box Fx$ är falskt i världen $w^*$, och därmed är $\Diamond(\exists x\, \Diamond Fx \to \forall x\, \Box Fx)$ falskt – det vill säga falskt i den verkliga världen $w^*$, eftersom sentensen är falsk i alla världar.

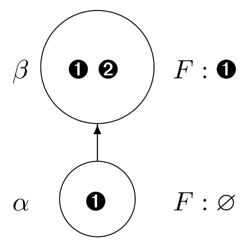
13. Betrakta följande intuitionistiska tolkning:




Vi har att $\alpha \nVdash \sim\sim A$ (eftersom $\gamma \Vdash \sim A$), att $\gamma \nVdash \sim\sim A$ (eftersom $\gamma \Vdash \sim A$), att $\beta \Vdash \sim\sim A$ (eftersom inget tillstånd $\sigma \geq \beta$ uppfyller $\sigma \Vdash \sim A$) och att $\beta \Vdash B$. Alltså har vi att alla tillstånd $\sigma \geq \alpha$ som uppfyller $\sigma \Vdash \sim\sim A$ (det är bara $\beta$ som uppfyller detta) också uppfyller $\sigma \Vdash B$. Detta betyder att $\alpha \Vdash \sim\sim A \to B$.

Vidare har vi att $\alpha \nVdash \sim A$ (eftersom $\beta \Vdash A$) och att $\alpha \nVdash B$. Alltså gäller $\alpha \nVdash \sim A \vee B$.

14. Betrakta följande intuitionistiska tolkning:




Vi har att $\alpha \nVdash \exists x\, Fx$. Vidare har vi att $\beta \Vdash \exists x\, Fx$, men också att $\beta \Vdash \exists x \sim Fx$ (det senare gäller eftersom $\beta \Vdash \sim F$❷). Alltså har vi visat att alla tillstånd $\sigma \geq \alpha$ som uppfyller $\sigma \Vdash \exists x\, Fx$ också uppfyller $\sigma \Vdash \exists x \sim Fx$. Detta betyder att $\alpha \Vdash \exists x\, Fx \to \exists x \sim Fx$.

Dessutom har vi att $\alpha \nVdash \exists x\, Fx$ (eftersom $\alpha \nVdash F$❶) och $\alpha \nVdash \exists x \sim Fx$ (eftersom $\alpha \nVdash \sim F$❶ då $\beta \Vdash F$❶), vilket visar att $\alpha \nVdash \exists x\, Fx \vee \exists x \sim Fx$.

15. Låt $\Omega = \Gamma \cup \Delta$. Det givna villkoret betyder att $\Omega$ saknar modeller. Enligt kompakthetssatsen finns det en ändlig delmängd $\Omega'$ till $\Omega$ som saknar modeller. Vi kan naturligtvis skriva $\Omega' = \Gamma' \cup \Delta'$ där $\Gamma'$ är en ändlig delmängd till $\Gamma$ och $\Delta'$ är en ändlig delmängd till $\Delta$.

    Tag nu en modell $\mathscr{I}$ för $\Gamma$. Denna tolkning är även en modell för $\Gamma'$ och eftersom $\Omega' = \Gamma' \cup \Delta'$ saknar modeller så måste det finnas en sentens $p \in \Delta'$ som är falsk i tolkningen $\mathscr{I}$. Därmed är $\Delta'$ den mängd vars existens skulle visas.

16. Den är sann precis i de tolkningar vars individdomän består av exakt en individ. Låt oss bevisa detta påstående.

    Till att börja med, betrakta en tolkning vars individdomän $D$ består av exakt en individ. Utan inskränkning kan vi skriva $D = \{\alpha\}$. Betrakta det tvåställiga predikatet $F$ och utöka tolkningen med $\mathrm{Ext}(F) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle\}$. Vi ser att $\forall x\, Fxx$ är sant i denna tolkning. Eftersom $D$ bara innehåller $\alpha$ finns det bara en funktion $f : D \to D$, nämligen den som definieras av att $f(\alpha) = \alpha$. I synnerhet har vi att $\forall x\, f(x) = x$ i detta fall. Det följer att sentensen $\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, f(x) = x$ är sann och eftersom $f$ var den enda tänkbara funktionen $D \to D$ så följer det att $\forall u\, (\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ och därmed att $\exists X\, \forall u\, (\forall x\, Xxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ är sant i denna tolkning.

    Betrakta nu istället en tolkning vars domän $D$ innehåller mer än en individ. Det finns alltså individer $\alpha, \beta \in D$ med $\alpha \neq \beta$. Betrakta predikatet $F$ och tag en godtycklig $\mathrm{Ext}(F)$. Vi har två fall: Antingen gäller $\forall x\, Fxx$ i tolkningen, eller så gäller det inte.

    I det första fallet kan vi betrakta en funktion $f : D \to D$ som uppfyller $f(\alpha) = \beta$. I synnerhet är $\forall x\, f(x) = x$ falskt i denna tokning och eftersom $\forall x\, Fxx$ var sant så är sentensen $\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, f(x) = x$ falsk i denna tolkning. Detta betyder att sentensen $\forall u\, (\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ är falsk i tolkningen.

    I det andra fallet kan vi låta funktionen $g : D \to D$ defineras av att $g(\xi) = \xi$ för alla $\xi \in D$. Då har vi att $\forall x\, g(x) = x$, men eftersom $\forall x\, Fxx$ var falskt i detta fall så är sentensen $\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, g(x) = x$ falsk i denna tolkning. I synnerhet är sentensen $\forall u\, (\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ falsk i tolkningen.

    Alltså har vi visat att oavsett vilket $\mathrm{Ext}(F)$ vi väljer så blir $\forall u\, (\forall x\, Fxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ falsk i tolkningen. Alltså är sentensen $\exists X\, \forall u\, (\forall x\, Xxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$ falsk i denna tolkning.