KTH Matematik

Tentamen i 5B1928, LOGIK för IT och D
Fredagen den 15 december 2006

Skrivtid: 14.00–19.00.

Ansvarig lärare: Andreas Enblom, tel 790 7208.

Tillåtet hjälpmedel: Utdelat formelblad.

Uppgifter: Varje uppgift ger högst 2 poäng. Lösningarna måste vara ordentligt motiverade.

Betygsgränser: Godkänt: Minst 13 poäng på del A.
Betyg 4: Minst 13 poäng på del A samt minst 4 poäng på del B.
Betyg 5: Minst 13 poäng på del A samt minst 8 poäng på del B.

Bonuspoäng: Problemlösningstester (PL) eller kontrollskrivniningar (KS) från högst en av höstterminen 2006 och vårterminen 2005 kan tillgodoräknas. Den som klarat PL/KS nr i ($i = 1, 2, 3$) får automatiskt 2 poäng på uppgifterna nr $2i - 1$ och $2i$ (och ska inte göra dem). Ange på omslaget vilka PL/KS du klarat.

Komplettering: Den som får 11 eller 12 poäng på del A kan få delta i en kompletteringsskrivning för att bli godkänd på kursen. Mer information om detta kommer på kurshemsidan. Ange din e-postadress på omslaget så får du besked om detta gäller dig.

DEL A

1. På den fjärran Knarrön (där ju var och en antingen är kung och alltid talar sanning, eller narr och alltid ljuger) möter vi öborna A, B och C.

   A säger: ”Om C är kung så är B också det.”
   B säger: ”Om A är narr så är C kung.”

   Vad kan sägas om A, B och C:s grupptillhörigheter?

2. Visa med naturlig deduktion att

$$A \vee \sim B, A \to \sim C \vdash C \to \sim B.$$

3. Avgör med tablåmetoden om

$$\exists x\,(Rx \to (Px \vee Qx)), \forall x\,(Rx\,\&\,\sim Qx) \models \forall x\,Px.$$

   Om det inte gäller, hitta en tolkning som visar detta.

4. Visa med naturlig deduktion att

$$\forall x\,(Fx \to \sim Gx) \vdash \forall x\,Fx \to \sim\exists x\,Gx.$$

5. Översätt följande till predikatlogiska sentenser:

   a) Alla maskerade banditer fruktar minst två sheriffer.

   b) För att det inte ska finnas någon sheriff är det nödvändigt att alla banditer är omaskerade.

   Använd följande lexikon: $B\_$: _ är bandit, $M\_$: _ är maskerad, $S\_$: _ är sheriff och $F\_,\_$: _ fruktar _.

6. Hitta en *modell* för

$$\{\exists x\, \forall y \sim Ryx,\ \forall x\, \exists y \sim Rxy,\ \forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)\}.$$

Det vill säga, hitta en tolkning som gör alla dessa sentenser sanna.

7. Visa med naturlig deduktion att

$$\exists x\, \forall y\, (Rxy \vee Ryx), \forall x\, \forall z\, (Rxz \rightarrow \exists y\, Ryx) \vdash \forall x\, \exists y\, Ryx.$$

Ledning: Börja med att anta $\forall y\, (Ray \vee Rya)$. Härled nu $\exists y\, Ryb$.

8. Måste en reflexiv och transitiv relation R som uppfyller $\forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z \,\&\, Rxy \,\&\, Rxz)$ vara en ekvivalensrelation? Motivera ditt svar ordentligt.

9. Låt $\mathscr{R}$ vara en relation mellan sentenser som definieras av att $\mathscr{R}pq$ betyder att sentensen $\sim(p \,\&\, q)$ är satisfierbar (det vill säga att det finns en tolkning som gör sentensen sann), för sentenser p och q. Avgör om $\mathscr{R}$ är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv.

10. Visa (med resonemang) att $\forall x\, \forall y\, S(x) + y = S(x + y)$ följer från Peanos axiom.

Ledning: Låt a vara godtycklig och visa att $\forall y\, S(a) + y = S(a + y)$.

DEL B

11. Visa med naturlig deduktion i modallogik att

$$\Box \sim A, \Box \sim B \vdash_{\mathrm{S5}} \sim\Diamond(A \vee \Diamond B).$$

12. Visa att i modallogik gäller

$$\Diamond(\exists x\, Fx \rightarrow \forall x\, \Box Fx) \nvDash_{\mathrm{S5}} \Diamond(\exists x\, \Diamond Fx \rightarrow \forall x\, \Box Fx).$$

13. Visa att i intuitionistisk logik gäller

$$\sim\sim A \rightarrow B \nvDash_{\mathrm{I}} \sim A \vee B.$$

14. Visa att i intuitionistisk logik gäller

$$\exists x\, Fx \rightarrow \exists x \sim Fx \nvDash_{\mathrm{I}} \exists x\, Fx \vee \exists x \sim Fx.$$

15. Låt Γ och Δ vara två sentensmängder (i första ordningens logik med likhet). Antag att det till varje modell $\mathscr{I}$ för Γ finns minst en sentens $p \in \Delta$ sådan att p är falsk i $\mathscr{I}$. Visa att Δ har en *ändlig* delmängd Δ' som uppfyller att det till varje modell $\mathscr{I}$ för Γ finns en sentens $p \in \Delta'$ sådan att p är falsk i $\mathscr{I}$.

Ledning: Betrakta mängden $\Omega = \Gamma \cup \Delta$.

16. I vilka tolkningar i andra ordningens predikatlogik är sentensen

$$\exists X\, \forall u\, (\forall x\, Xxx \leftrightarrow \forall x\, u(x) = x)$$

sann? Motivera ditt svar ordentligt.

Lycka till!