Tentamen

Tisdag 7 juni 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

eller visa att gränsvärdet inte existerar.

2. (4 poäng) Beräkna

$$\frac{d}{dy} \int_{y^2}^{y^3} \frac{e^{xy^2}}{x} dx$$

för $y > 0$.

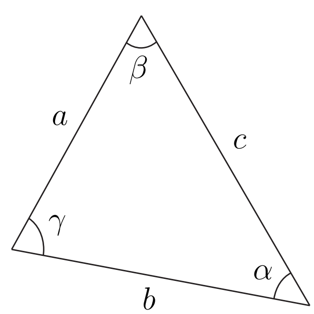
3. (4 poäng) Beräkna dubbelintegralen

$$\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dxdy.$$

4. (4 poäng) Transformera f''_{xy} till de nya variablerna

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = xy. \end{cases}$$

5. (4 poäng) Betrakta en triangel vars tre sidor har längderna a, b, c och där α, β, γ betecknar motstående vinklar enligt följande figur:



Hitta ett implicit uttryck för $\alpha = \alpha(a, b, c)$ som en funktion av a, b och c och bestäm de partiella derivatorna $\frac{\partial \alpha}{\partial a}$ och $\frac{\partial \alpha}{\partial b}$.

6. (4 poäng) Beräkna

$$\iiint_K xze^{y+z^2} dxdydz$$

där

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1\}.$$

7. (4 poäng) (a) Är $\mathbf{u} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2 - 2z)$ ett potentialfält?

   (b) Beräkna
$$\int_\gamma \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$
   längs kurvan γ given av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

8. (4 poäng) Ytan S består av den delen av paraboloiden $z = x^2 + 4y^2$ som ligger under planet $z = 1$ orienterad så att normalvektorn $\mathbf{N}$ får positiv z-komponent. Bestäm flödet av vektorfältet $\nabla \times \mathbf{F}$ genom S där $\mathbf{F} = (y, -xz, xz^2)$.

9. (4 poäng) Beräkna
$$\iint_D e^{(x+y)^2} dxdy$$
   där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

10. (4 poäng) Låt Y vara ytan som erhålls då en cirkel i xz-planet med radie 2 och mittpunkt $(3,0,0)$ roteras kring z-axeln.

    (a) Bestäm arean av Y.

    (b) Beräkna ytintegralen
$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$
    där $\mathbf{F} = (0, 0, z/2)$ och orienteringen är sådan att den positiva enhetsnormalen i punkten $(5,0,0) \in Y$ har positiv x-komponent.