Tentamen

Torsdag 18 augusti 2016 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.
Max: 40 poäng

1. (4 poäng) Låt
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \geq x^4, \\ 1, & y \leq 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$
Bestäm följande gränsvärden eller visa att det givna gränsvärdet inte existerar:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

2. (4 poäng) Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(\pi, 1, 4\pi)$ till ytan $z = f(x,y)$ där $f(x,y) = 4xy^2 + \sin x$.

3. (4 poäng) Låt
$$a = a(t), \qquad b = b(t), \qquad c = c(t),$$
beteckna längden, bredden och höjden av en rektangulär box vars dimensioner beror av tiden t. Vid en given tidpunkt gäller att $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m, $\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = 1$ m/s och $\frac{dc}{dt} = -3$ m/s.

   (a) Med vilken takt förändras boxens volym vid den givna tidpunkten?

   (b) Låt $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ vara längden av en av boxens inre diagonaler. Ökar eller minskar D vid den givna tidpunkten?

4. (4 poäng) Bland alla punkterna på grafen till funktionen $z = 10 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför planet $x + 2y + 3z = 0$, bestäm den punkt som ligger på störst avstånd från planet.

5. (4 poäng) Låt $u(x,y,z)$ vara en lösning till Laplaceekvationen $\Delta u = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

   (a) Om $u(x,y,z) = f(r)$ där $f(r)$ bara beror på avståndet $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ till origo, så uppfyller $f(r)$ en ordinär differentialekvation. Bestäm denna ekvation.

   (b) Bestäm den allmänna radiella (dvs som bara beror av avståndet r till origo) lösningen till Laplaceekvationen i tre dimensioner genom att lösa ekvationen för $f(r)$.

6. (4 poäng) Beräkna
$$\iint_D e^{-2x-3y} dxdy$$
där D är området $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 6$.

7. (4 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2, xz, y^2)$ genom ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + y + z = 2,\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat.

8. (4 poäng) Låt Y vara den sfäriska kalotten

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z \geq 1.$$

(a) Ge en parameterframställning av Y.

(b) Bestäm en normalvektor till Y.

(c) Beräkna arean av Y.

(d) Beräkna arean av

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad z \geq h, \qquad 0 \leq h \leq R.$$

9. (4 poäng) Låt $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ vara sfären med radie 1 centrerad i punkten $(0, 0, 1)$. Låt $K \subset \mathbb{R}^3$ vara den kropp som begränsas uppåt av konen $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ och nedåt av Σ. Bestäm volymen av K.

10. (4 poäng) Bestäm de båda punkterna på ellipsen $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 45$ som ligger närmast origo.