Matematiska Institutionen, KTH

Lösning till tentamensskrivning i Linjär algebra komplettering, SF1605, måndagen den 11 januari 2010, kl 14.00-19.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 15p.)

5	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
6	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
8	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
10	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
12	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
14	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Generellt gäller att för full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Problem:

1. Betrakta vektorrummet R^5.

   (a) (1p) Bestäm en bas för det delrum L till R^5 som spänns upp av vektorerna $(1, 2, 1, 3, 2)$, $(2, 0, 0, 3, 2)$, $(3, 3, 2, 7, 5)$ och $(1, 1, 1, 1, 1)$.

   Lösning: Vi bestämmer en bas för radrummet till matrisen med rader enligt ovan. Elementära radoperationer ändrar inte radrummet och vi finner alltså:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

   SVAR: T ex de fyra raderna i matrisen ovan.

   (b) (1p) Visa att vektorn $\bar{u} = (1, -2, 1, 0, 0)$ inte tillhör L.

   Lösning: Låt de fyra raderna i den senast uppskrivna matrisen vara en bas för L. Om vektorn $\bar{u}$ tillhör L skulle den kunna skrivas som en linjärkombination av basvektorerna, dvs

$$(1, -2, 1, 0, 0) = a(1, 0, 0, 3, 2) + b(0, 1, 0, 2, 1) + c(0, 0, 1, -4, -2) + d(0, 0, 0, -3, -2),$$

   där de enda möjligheterna för a, b, c, d är $(a, b, c, d) = (1, -2, 1, d)$, men

$$1(1, 0, 0, 3, 2) + (-2)(0, 1, 0, 2, 1) + 1(0, 0, 1, -4, -2) + d(0, 0, 0, -3, -2) =$$

$$= (1, -2, 1, -7, -2) + d(0, 0, 0, -3, -2),$$

   som ju inte är lika med $\bar{u}$ för något val av talet d.

(c) (1p) Om du hittar ytterligare en vektor $\bar{v}$ som inte tillhör L och som inte är parallell med $\bar{u}$, kommer då alltid $\bar{u}$ och $\bar{v}$ att tillsammans med en bas för det ovan givna delrummet L att bilda en bas för R^5. Motivera ditt svar!

Lösning: Nej, ty då skulle R^5 ha en bas bestående av sex basvektorer vilket strider mot att dimensionen hos R^5 är 5.

2. En linjär avbildning A från R^4 till R^5 definieras av att $A(1,1,1,1) = (1,2,1,0,1)$, $A(1,2,3,4) = (0,0,0,0,1)$, $A(0,0,1,1) = (0,1,0,1,0)$ och $A(0,0,1,0) = (1,1,0,0,0)$.

(a) (1p) Ange på ett lämpligt sätt en matris som beskriver avbildningen.

Lösning: Vi väljer att beskriva avbildningen med en matris där det koordinatsystem som används i R^4 bygger på basen $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$, $(0,0,1,1)$ och $(0,0,1,0)$ samt där vi i R^5 använder standradbasen. Vi får då matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm avbildningens kärna.

Lösning: Vi bestämmer de $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ sådana att $\mathbf{A}\bar{x}^T = \bar{0}^T$. Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ett system som endast har nollösningen så avbildningens kärna är nollvektorn.

(c) (1p) Bestäm dimensionen hos avbildningens bildrum (”range”).

Lösning: Fundamentalsatsen ger nu att

$$\dim(\mathrm{R}(A)) = \dim(R^4) - \dim(\ker(A)) = 4 - 0 = 4$$

3. (3p) Visa med hjälp av induktion att för varje naturligt tal $n \geq 1$ gäller att talet 5 delar talet $4^{2n} - 1$.

Lösning: Trivialt gäller att 5 delar $4^{2 \cdot 1} - 1 = 15$. Vi visar nu att för alla n gäller att om talet 5 delar $4^{2n} - 1$, dvs $4^{2n} - 1 = 5k$, så medför detta att 5 delar $4^{2(n+1)} - 1$, dvs $4^{2(n+1)} - 1 = 5k'$:

$$4^{2(n+1)} - 1 = 4^2 \cdot 4^{2n} - 1 = 16(5k+1) - 1 = 16 \cdot 5k + 16 - 1 = 5(16k+3) = 5k'.$$

Enligt induktionsaxiomet gäller nu påståendet för alla naturliga tal n.

4. (3p) Betrakta R^5. Bestäm en bas för snittet mellan delrummen L och M, om L spänns upp av (genereras av) vektorerna $(1,2,1,2,1)$, $(0,1,0,1,0)$ och $(3,2,1,0,1)$ och M spänns upp av $(1,1,1,1,1)$, $(1,2,2,1,1)$ och $(1,0,1,0,1)$.

(Snittet mellan två vektorrum består av vektorrummens gemensammma vektorer.)

Lösning: Oj, vi råkar se att både L och M innehåller vektorerna $(1,0,1,0,1)$ och $(0,1,0,1,0)$. Snittet är ett delrum till M; ett delrummet till M som har dimension 3, är lika med M, och inget annat, och skulle då innehålla även vektorn $(1,2,2,1,1)-(1,1,1,1,1)$. Så frågan är om $(0,1,1,0,0)$ som tillhör M också tillhör L, som vi testar nu:

$$(0,1,1,0,0) = x(1,0,1,0,1) + y(0,1,0,1,0) + z(3,2,1,0,1),$$

som ju saknar lösning. Så snittet är det delrum som spänns upp av $(1,0,1,0,1)$ och $(0,1,0,1,0)$.

SVAR: En bas för snittet utgörs av vektorerna $(1,0,1,0,1)$ och $(0,1,0,1,0)$.

5. Vi betraktar vektorrummet $\mathcal{P}_3$ av alla polynom av grad högst lika med 2. Summan av två vektorer $p(t)$ och $q(t)$, liksom multiplikation med skalär, ges av "vanlig" polynomkalkyl, dvs $(p+q)(t) = p(t)+q(t)$ respektive $(\lambda p)(t) = \lambda p(t)$.

   (a) (1p) Finns det några värden på talet a som gör att produktbildningen

   $$(p \mid q) = p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3) \ ,$$

   utgör en inre produkt i $\mathcal{P}_3$. Ange i så fall dessa värden på talet a. (Motivera din lösning!)

   Lösning: Vi testar om för vilka värden på talet a som kraven på en inre produkt är uppfyllda:
   (i)

   $$(p \mid q) = p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3) = q(1)p(1) + aq(2)p(2) + q(3)p(3) = (q \mid p).$$

   (ii)

   $$(\lambda p \mid q) = \lambda p(1)q(1) + a\lambda p(2)q(2) + \lambda p(3)q(3) =$$
   $$\lambda(p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3)) = \lambda(p \mid q).$$

   (iii)

   $$(p \mid (q+r)) = p(1)(q+r)(1) + ap(2)(q+r)(2) + p(3)(q+r)(3) =$$
   $$(p(1)q(1) + ap(2)q(2) + p(3)q(3)) + (p(1)r(1) + ap(2)r(2) + p(3)r(3)) = (p \mid q) + (p \mid r).$$

   eftersom $(q+r)(x) = q(x) + r(x)$.
   (iv)

   $$(p \mid p) = p(1)p(1) + ap(2)p(2) + p(3)p(3) \geq 0,$$

   för alla polynom av grad högst två endast om $a > 0$, ty betrakta polynomet $p(t) = (t-1)(t-3)$; för detta polynom gäller $(p \mid p) = a$. Så frågan är om $a > 0$ medför att $(p \mid p) > 0$ för alla polynom som inte är nollpolynomet. Vi finner att om $a > 0$ så

   $$(p \mid p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p(1) = 0,\ p(2) = 0,\ p(3) = 0,$$

   men eftersom polynomets grad är högst lika med två kan det ha högst två olika nollställen såvida det inte är nollpolynomet.

   (b) (2p) Bestäm en inre produkt i $\mathcal{P}_3$ sådan att polynomet t projiceras på polynomet 1 i det delrum till $\mathcal{P}_3$ som spänns upp av polynomen 1, $1+t^2$, eller visa att en sådan inre produkt saknas.

   Lösning: Det givna rummet kan betraktas med basen 1, $t-1$ och $1+t^2$. Polynomet $x+yt+zt^2$ har i denna bas koordinaterna $(x-z+y, y, z)$. Vi inför en inre produkt genom

   $$((a_1,a_2,a_3) \mid (b_1,b_2,b_3)) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

   Den givna basen blir då en ortogonalbas relativt den givna inre produkten. Polynomet $t-1$ är då ortogonalt mot delrummet som spänns upp av 1 och $1+t^2$; vidare är $t = (t-1)+1$ vilket tillsammans visar att 1 är projektionen av t på det givna delrummet.