Lösningar till tentamen i kurs SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra 120109.

1. Låt $P(n)=\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}=1-\frac{1}{n^2}$. $P(2):VL=\frac{3}{4}=HL$ dvs $P(2)$ är sann.

Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n+1$:

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{(k-1)^2k^2}+\frac{2(n+1)-1}{(n+1-1)^2(n+1)^2}=\{induktionsantagande\}=$$

$$=1-\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1+\frac{2n+1-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}\ .$$

Då är $P(n)$ sant för $n\geq 2$ enligt induktionsprincipen.

2. Vi bestämmer först en ortogonal bas i det givna delrummet. Gram-Schmidts metod ger: Låt $\bar{u}_1=(1,0,1,1)$, $\bar{u}_2=(2,1,0,1)$. Dessa utgör en bas i det givna delrummet. Låt nu $\bar{v}_1=\bar{u}_1$ och bilda $\bar{v}_2=\bar{u}_2-\frac{\bar{u}_2\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}\bar{v}_1=(2,1,0,1)-(1,0,1,1)=(1,1,-1,0)$. $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ utgör nu en ortogonal bas i delrummet. Låt $\bar{u}=(1,1,1,1)$. Den sökta projektionen ges nu av

$$\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}\bar{v}_1+\frac{\bar{\mathrm{u}}\cdot\bar{\mathrm{v}}_2}{\bar{\mathrm{v}}_2\cdot\bar{v}_2}\bar{v}_2=(1,0,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,-1,0)=\frac{1}{3}(4,1,2,3)\ .$$

3.a) Se kap 6 i läroboken

b) Bilda matrisen $A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&1\end{bmatrix}$. Då gäller att W är matrisens radrum. Enligt en sats ges då det ortogonala komplementet av matrisens nollrum. Vi löser ekvationen $A\bar{x}=\bar{0}$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&2&0&1&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\-2\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}t\ .$$ Det ortogonala komplementet ges alltså av $span\{(2,1,0,-2),(0,0,1,0)\}$.

4. Först bestämmer vi matrisen för T relativt standardbasen $\{1, x, x^2\}$. Kolumnerna ges av bildernas koordinatvektorer i denna bas.

$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$, $T(x) = x + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$, $T(x^2) = (x+1) \cdot 2x = 2x + 2x^2 =$
$= 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2$.

Detta ger matrisen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Vi vill diagonalisera matrisen. Egenvärdena är 0,1 och 2.

Vi söker egenvektorer:

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

$$\lambda = 2: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Vi väljer $t = 1$ och får basen $\{1, 1+x, 1+2x+x^2\}$ av egenvektorer i vilken matrisen för T ges av $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5.a) Vi visar det som krävs enligt definitionen av en linjär avbildning:

1. $T(A+B) = A + B - (A+B)^T = A + B - (A^T + B^T) = A - A^T + B - B^T = T(A) + T(B)$
2. $T(kA) = kA - (kA)^T = kA - kA^T = k(A - A^T) = kT(A)$

för alla $A, B \in M_{22}$ och alla reella tal k .

b) $\ker(T) = \{A : T(A) = 0\} \Rightarrow A - A^T = 0 \Rightarrow A = A^T \Rightarrow \ker(T)$ består av alla symmetriska $2 \times 2-$matriser. Vi kan skriva
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. De tre matriserna till höger spänner kärnan.

De är också linjärt oberoende ty om vi sätter högra ledet till $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ fås $a = b = c = 0$.

De utgör då en bas i $\ker(T)$.

c) Från b) ser vi att dimensionen hos kärnan är 3 . Eftersom dimensionen hos M_{22} är 4 ger dimensionssatsen att $rank(T) = 4 - 3 = 1$.