KTH Matematik

Tentamen i kursen SF1605 Kompletteringskurs i linjär algebra.
Måndagen den 9 januari 2012 kl 1400-1900.

För godkänt betyg (E) krävs minst 6 poäng.
Den som uppnår 5 poäng erhåller betyg Fx och kommer därmed att erbjudas en kompletteringstentamen.
För de högre betygen D,C,B och A gäller betygsgränserna 8, 10, 12 resp 14 poäng.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

Uppgifter:

1. Använd induktion för att visa att $\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ för alla heltal $n \geq 2$. (2p)

2. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(1,1,1,1)$ på delrummet $span\{(1,0,1,1),(2,1,0,1)\}$ av $\mathbf{R}^4$ med euklidisk inre produkt. (3p)

3a) Låt W vara ett delrum av inre produktrummet V.
Definiera vad som menas med det ortogonala komplementet till W i V. (1p)
b) Låt $V = \mathbf{R}^4$ med euklidisk inre produkt och $W = span\{(1,0,0,1),(0,2,0,1)\}$.
Bestäm det ortogonala komplementet till W i V. (2p)

4. Betrakta vektorrummet P_2 av polynom med grad högst två.
En linjär avbildning $T: P_2 \to P_2$ definieras av $T(p(x)) = (x+1)\frac{d}{dx}p(x)$ för alla $p \in P_2$. Bestäm en bas för P_2 i vilken avbildningens matris är diagonal.
Ange också diagonalmatrisen. (3p)

5. Betrakta vektorrummet M_{22} av reella $2 \times 2-$matriser och studera avbildningen $T: M_{22} \to M_{22}$ som definieras av $T(A) = A - A^T$ för alla $A \in M_{22}$.
a) Visa att T är linjär. (1p)
b) Bestäm en bas i avbildningens kärna, $\ker(T)$. (2p)
c) Beräkna avbildningens rang, $rank(T)$. (1p)